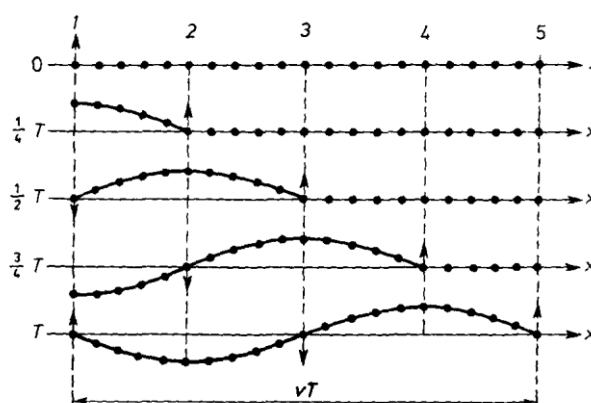


## Wykład 20

### FALE.

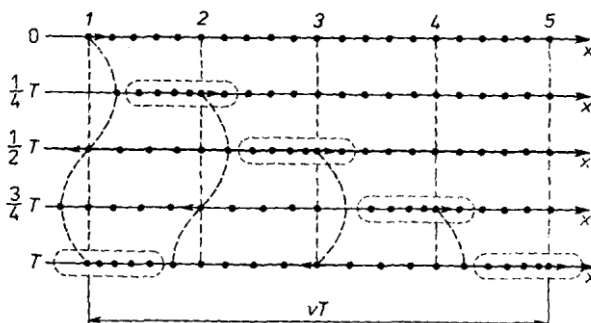
#### 20-1 Procesy falowe. Fale poprzeczne i podłużne.

Drgania wzbudzone w dowolnym punkcie ośrodka (fazy stałej, ciekłej, lub gazowej), rozprzestrzeniają się w nim ze skończoną prędkością, która zależy od własności ośrodka. Proces rozprzestrzeniania się drgań w ośrodku ciągłym, okresowy w czasie i przestrzeni nazywamy **procesem falowym** lub **falą**. Podczas rozchodzenia się fali, cząsteczki ośrodka nie poruszają się wraz z falą, a jedynie drgają wokół swoich położenia równowagi. Wraz z falą, od jednego punktu ośrodka do drugiego, przekazywany jest sam proces ruchu drgającego i jego energia. Dlatego podstawową własnością wszystkich fal, niezależnie od ich natury, jest transport energii bez przenoszenia materii.



Rysunek 20.1

Falami **sprężystymi** lub **mechanicznymi** nazywamy mechaniczne zaburzenia rozchodzące się w ośrodku sprężystym. Fale sprężyste mogą być **podłużne** i **poprzeczne**. W falach poprzecznych cząstki ośrodka drgają w płaszczyznach prostopadłych do kierunku rozprzestrzeniania się fali (*Rysunek 20.1*). W falach podłużnych cząsteczki ośrodka drgają w kierunku rozchodzenia się fali (*Rysunek 20.2*).

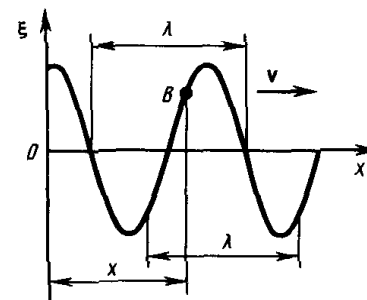


Rysunek 20.2

Fale poprzeczne sprężyste mogą powstawać tylko w takich ośrodkach, które wykazują sprężystość postaci. Z tego względu w ośrodkach ciekłych i gazowych możliwe jest tylko rozchodzenie się fal podłużnych. W ciałach stałych możliwe jest powstawanie zarówno fal podłużnych, jak i

poprzecznych.

Fala sprężysta nazywa się **harmoniczną**, jeżeli odpowiadające jej drgania cząstek ośrodka są harmoniczne. Na **rysunku 20.3** przedstawiona jest fala harmoniczna (podłużna lub poprzeczna), rozprzestrzeniająca się z prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x$ . Na rysunku tym przedstawiona jest zależność wychylecia  $\xi$  z położenia równowagi cząstki ośrodka od położenia jej stanu równowagi  $x$  od źródła w pewnym ustalonym momencie czasu  $t$ .



**Rysunek 20.3**

Odległość między najbliższymi cząstkami, drgającymi w jednakowej fazie nazywa się **długością fali  $\lambda$**  (**Rysunek20.3**).

Długość fali jest równa odległości, na którą rozprzestrzeni się fala (faza) w czasie równym okresowi:

$$\lambda = vT$$

20.1

lub uwzględniając, że  $T = 1/\nu$ , gdzie  $\nu$  – częstotliwość drgań

$$v = \lambda \nu$$

20.2

Jeżeli przyjrzeć się uważniej procesowi falowemu, to widać wyraźnie, że drgają nie tylko cząstki położone wzdłuż osi  $x$ , ale wszystkie cząstki położone w pewnej objętości. Innymi słowy, fala, rozprzestrzeniając się od źródła, obejmuje coraz to nowe obszary przestrzeni. Miejsce geometryczne punktów, do których docierają drgania w chwili  $t$  nazywa się **frontem fali**. Miejsce geometryczne punktów drgających w jednakowej fazie nazywa się **powierzchnią falową**. Powierzchni falowych jest nieskończenie dużo, podczas gdy, front fali w danej chwili  $t$  istnieje tylko jeden.

Powierzchnie falowe mogą mieć dowolny kształt. W najprostszym przypadku stanowią one zbiór płaszczyzn równoległych do siebie, lub zbiór koncentrycznych sfer. Odpowiednio mówimy wtedy o **fali płaskiej lub kulistej**.

## 20-2 Prędkości fal.

Podstawową własnością fal jest to, że ich prędkość zależy od własności ośrodka, ale nie zależy od ruchu źródła fal. Na przykład, prędkość dźwięku z klaksonu samochodowego zależy tylko od własności powietrza, a nie zależy od ruchu auta. Dla pojedynczego impulsu falowego rozprzestrzeniającego się w linie, łatwo można pokazać, że im większe naprężenie liny, tym większa prędkość fali. Poza tym, fala rozchodzi się szybciej przy tym samym naprężeniu w lżejszej linie niż w cięższej. Pokażemy dalej, że jeżeli  $F$  jest naprężeniem, a  $\mu$  – gęstością liniową liny (masa na jednostkę długości), wtedy prędkość fali dana jest wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

20.3

***Prędkość fali w strunie.***

Dla fal dźwiękowych rozchodzących się w płynie takim jak powietrze, czy woda można pokazać, że prędkość  $v$  fali jest dana równaniem:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

20.4

gdzie  $\rho$  jest gęstością równowagową ośrodka, a  $B$  jest **modułem ściśliwości**. Widać, że prędkość fali zależy od własności sprężystych ośrodka i własności inercyjnych ośrodka (gęstość liniowa, lub gęstość ośrodka).

Dla fal dźwiękowych w takich ośrodkach jak powietrze, moduł ściśliwości jest proporcjonalny do ciśnienia  $p$ , które z kolei jest proporcjonalne do gęstości  $\rho$  i do temperatury w skali bezwzględnej  $T$ . Dlatego stosunek  $B/\rho$  nie zależy od gęstości i jest po prostu proporcjonalny do  $T$ . W pierwszym semestrze było pokazane, że w tym przypadku równanie 20-4 jest równoważne z równaniem:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$$

20.5

***Prędkość dźwięku w powietrzu.***

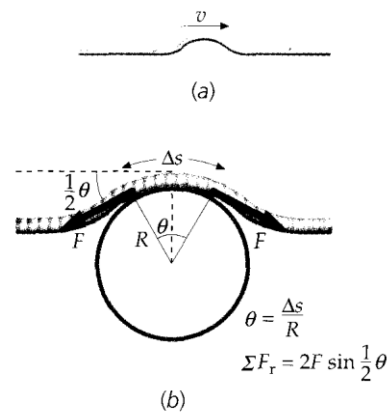
W równaniu tym temperatura mierzona jest w kelwinach. Wykładnik adiabaty  $\kappa$  dla gazów dwuatomowych takich jak  $O_2$  i  $N_2$  ma wartość 1,4, a ponieważ  $O_2$  i  $N_2$  stanowią 98% składu atmosfery, to taka jest również wartość dla powietrza. Stała gazowa  $R = 8,314\text{J/mol K}$ , a masa cząsteczkowa powietrza  $\mu = 29 \times 10^{-3}\text{kg/mol}$ .

## PRZKŁAD

Na podstawie równania 20-5 oblicz prędkość dźwięku w powietrzu w temperaturze (a)  $0^{\circ}\text{C}$  i (b)  $20^{\circ}\text{C}$ . (Odpowiedź: (a) – 331m/s, (b) – 334m/s)

**Wyprowadzenie równania na prędkość fali w strunie.** Równanie 20-3 można

wyprowadzić z praw Newtona. Rozważmy pojedynczy impuls poruszający wzdłuż struny z prędkością  $v$  tak jak na **rysunku 20.4a**. Jeżeli amplituda zaburzenia jest stosunkowo mała w porównaniu do długości struny, wtedy napięcie struny  $F$  jest stałe wzdłuż całej struny. W układzie współrzędnych poruszającym się z prędkością  $v$  na prawo, impuls pozostaje nieruchomy, a struna porusza się z prędkością  $v$  na lewo. **Rysunek 20.4b** przedstawia mały wycinek struny o długości  $\Delta s$ .



**Rysunek 20.4**

Wycinek ten tworzy część okręgu o promieniu  $R$ . Ponieważ prędkość chwilowa wycinka  $v$  jest skierowana stycznie do okręgu, to działa na niego siła dośrodkowa  $v^2/R$ . Siłami, które działają na oba końce wycinka są siły napięcia struny  $F$ . Składowe poziome tych sił są sobie równe i przeciwnie skierowane, a zatem znoszą się wzajemnie. Składowe pionowe są skierowane do środka okręgu. Wypadkowa tych składowych jest siłą dośrodkową. Z rysunku widać, że wypadkowa siła jest równa:

$$\sum F_r = 2F \sin \frac{1}{2} \theta \approx 2F \left( \frac{1}{2} \theta \right) = F \theta$$

gdzie dla małych kątów wykorzystaliśmy przybliżenie  $\sin \frac{1}{2} \theta \approx \frac{1}{2} \theta$ . Jeżeli  $\mu$  jest masą na jednostkę długości, to masa rozpatrywanego wycinka o długości  $\Delta s$  wynosi  $m = \mu \Delta s$ . Związek między kątem, a  $\Delta s$  ma postać:

$$\theta = \frac{\Delta s}{R}$$

W rezultacie masa wycinka

$$m = \mu \Delta s = \mu R \Delta s$$

Korzystając ze wzoru na siłę dośrodkową i podstawiając powyższe mamy:

$$F\theta = \mu R\theta \frac{v^2}{R}$$

Po wyliczeniu  $v$  otrzymujemy  $v = \sqrt{F/\mu}$ .

### 20-3 Równanie fali (Funkcja falowa). Prędkość fazowa.

#### Równanie falowe.

Równaniem fali nazywamy wyrażenie przedstawiające wychylenie drgającej cząstki w funkcji jej współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i czasu  $t$ :

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

W celu wyprowadzenia równania fali rozpatrzmy płaską, sinusoidalną falę, zakładając, że oś  $x$  pokrywa się z kierunkiem rozchodzenia się fali. W tym przypadku powierzchnie falowe będą prostopadłe do osi  $x$ , a ponieważ wszystkie punkty powierzchni drgają jednakowo, więc wychylenie  $\xi$  będzie zależało tylko od  $x$  i  $t$ :  $\xi = \xi(x, t)$ . Niech drgania punktów, leżących w płaszczyźnie  $x = 0$  (**Rysunek 20-5**) mają postać:

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

lub, co jest równoważne:

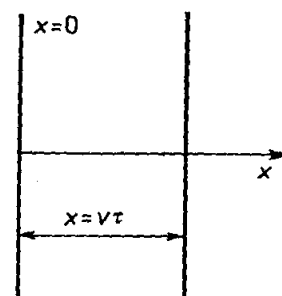
$$\xi(0, t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Znajdźmy postać drgań punktów w płaszczyźnie odpowiadającej dowolnej wartości  $x$ . Na przejście drogi od płaszczyzny  $x = 0$  do tej płaszczyzny fala potrzebuje czasu  $\tau = x/v$  ( $v$  – prędkość rozchodzenia się fali). Drgania cząstek leżących w płaszczyźnie  $x$  odbywają się, więc z opóźnieniem  $\tau$  w stosunku do drgań cząstek w płaszczyźnie  $x = 0$ , mają zatem postać

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] \quad 20.6$$

lub

$$\xi(x, t) = A \sin[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] \quad 20.6a$$



**Rysunek 20.5**

gdzie  $A$  – **amplituda fali**,  $\varphi_0$  – **faza początkowa** określona wyborem początku odliczania  $x$  i  $t$ . Wyrażenie  $[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$  nazywa się **fazą fali**. Równanie 20.6 i 20.6a jest **równaniem fali płaskiej**. Z równania tego wynika ważna cecha fali – fala jest to proces okresowy w czasie i przestrzeni.

W celu nadania równaniu 20.6 postaci symetrycznej względem  $x$  i  $t$  wprowadza się wielkość

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 20.7$$

zwaną liczbą falową. Mnożąc licznik i mianownik przez  $T$  otrzymujemy

$$k = \frac{\omega}{v} \quad 20.7a$$

Wtedy równanie 20.6 możemy przepisać w postaci

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad 20.8$$

lub

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Jeżeli fala rozprzestrzenia się w kierunku przeciwnym do kierunku dodatniego osi  $x$ , to równani fali płaskiej przyjmie postać

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

lub

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$$

Korzystając z równania Eulera równanie fali płaskiej można zapisać w postaci zespolonej

$$\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

gdzie sens fizyczny posiada tylko część rzeczywista.

Założmy, że faza fali jest stała, tzn.

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 = \text{const} \quad 20.9$$

Różniczkując to wyrażenie otrzymujemy

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0$$

skąd

$$\frac{dx}{dt} = v \quad 20.10$$

Z równania 20.10 wynika, że **prędkość rozchodzenia się fali  $v$  jest jednocześnie prędkością przemieszczania się danej wartości fazy. Prędkość tę nazywa się **prędkością fazową**.**

Równanie fali kulistej ma postać np.:

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) \quad 20.11$$

gdzie  $r$  – odległość od środka fali do danego punktu ośrodka. W przypadku fali kulistej nawet, jeżeli nie występuje pochłanianie energii w ośrodku, mamy do czynienia z maleniem amplitudy jak  $1/r$ . Równanie 20.11 jest prawdziwe tylko dla przypadku, gdy odległość od źródła jest znacznie większa od rozmiarów samego źródła.

Z równania 20.7 wynika, że

$$v = \frac{\omega}{k} \quad 20.12$$

Oznacza to, że **prędkość fazowa fal sinusoidalnych zależy od częstości. Zjawisko to nosi nazwę **dyspersji fal**, a ośrodek, w którym obserwuje się dyspersję fal nazywamy **dyspersyjnym**.**

Rozprzestrzenianie się fal w jednorodnym, izotropowym ośrodku w ogólnym przypadku opisane jest przez równanie falowe. Jest to równanie różniczkowe zapisane za pomocą pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

lub

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

20.13

gdzie  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  jest **operatorem Laplace'a**. Rozwiązaniem równania falowego jest równanie fali.

W przypadku fali płaskiej rozprzestrzeniającej się wzdłuż osi x równanie falowe upraszcza się do postaci

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

20.14

Robiąc odpowiednie podstawienia, można się przekonać, że równanie 20.14 spełnione jest w szczególności dla fali płaskiej danej równaniem 20.8.

#### **20-4 Zasada superpozycji fal. Prędkość grupowa.**

Ośrodek nazywamy **liniowym**, jeżeli jego własności nie ulegają zmianie pod wpływem zaburzeń wywołanych rozprzestrzeniającą się falą. Jeżeli w ośrodku liniowym rozprzestrzenia się jednocześnie kilka fal, to obowiązuje **zasada superpozycji fal**:

**Podczas rozprzestrzeniania się w ośrodku liniowym jednocześnie kilku fal, każda z nich rozchodzi się tak jak gdyby rozprzestrzeniała się w ośrodku tylko ta jedna, i w rezultacie**



**drgania cząstek ośrodka stanowią geometryczną sumę drgań, które wykonywałyby cząstki podczas rozchodzenia się każdej z fal osobno.**

Wychodząc z zasady superpozycji i rozkładu Fouriera dowolna falę można przedstawić w postaci układu fal sinusoidalnych zwanego **paczką** lub **grupą fal**. Paczką falową nazywamy superpozycję fal, których częstotliwości niewiele się od siebie różnią i które w każdej chwili czasu zajmują ograniczoną część przestrzeni.

Jednym z prostszych przykładów paczki falowej jest złożenie dwu fal rozprzestrzeniających się wzdłuż osi  $x$ , posiadających jednakowe amplitudy, i które posiadają niewiele różniące się częstotliwości i liczby falowe, przy czym  $d\omega \ll \omega$  i  $dk \ll k$ . Wtedy

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx)$$

Fala ta różni się od sinusoidalnej tym, że jej amplituda  $A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \right|$  jest funkcją wolno zmieniającą się w czasie  $t$  i współrzędnej  $x$ .

Jako prędkość takiej niesinusoidalnej fali (paczki falowej) przyjmuje się prędkość przesuwania się maksymalnej amplitudy fali, która tym samym charakteryzuje prędkość rozchodzenia się środka paczki falowej. Dla warunku  $td\omega - xdk = \text{const}$ , otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u \quad 20.15$$

Prędkość  $u$  nazywa się **prędkością grupową**. Określa ona prędkość rozprzestrzeniania się grupy fal, tworzących w każdej chwili w przestrzeni zlokalizowaną paczkę falową. Równanie 20.15 jest prawdziwe dla dowolnej paczki falowej.

Znajdźmy związek między prędkością grupową  $u = \frac{d\omega}{dk}$ , prędkością fazową  $v = \frac{\omega}{k}$ .

Uwzględniając, że  $\lambda = 2\pi/k$ , otrzymujemy

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \left( \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \right) = v + k \left( -\frac{\lambda}{k} \right) \frac{dv}{d\lambda},$$

lub

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

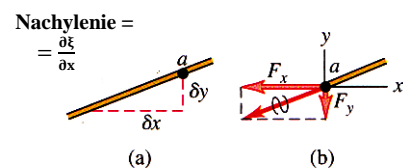
20.16

Z równania 20.16 wynika, że prędkość grupowa  $u$  może być większa lub mniejsza od  $v$  w zależności od znaku  $\frac{dv}{d\lambda}$ . W ośrodkach **niedispersyjnych**  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$  i prędkość grupowa pokrywa się z prędkością fazową.

Pojęcie prędkości grupowej ma duże praktyczne znaczenie, ponieważ to ją wykorzystuje się do pomiarów odległości w radiolokacji, w układach kierującymi pojazdami kosmicznymi itp. W szczególnej teorii względności udowadnia się, że zawsze prędkość grupowa  $u \leq c$ , podczas gdy prędkość fazowa nie ma takiego ograniczenia.

## 20-5 Energia fali w strunie.

Z każdym ruchem falowym związana jest energia. Oczywiście wszyscy dobrze znamy przykłady przenoszenia energii przez fale: promienie słoneczne, destrukcyjne działanie fal morskich lub fal sejsmicznych w czasie trzęsień ziemi. Aby wywołać jakiegokolwiek ruch falowy należy przyłożyć zewnętrzną siłę do jakiegoś punktu ośrodka. Ponieważ punkt do którego przyłożyliśmy siłę porusza się, to w rezultacie wykonujemy pracę nad układem. W trakcie rozprzestrzeniania się fali dana część ośrodka wywiera siłę na sąsiadującą część. W ten sposób następuje transport energii z jednego obszaru do drugiego.



**Rysunek 20.6**

Jako przykład rozważań dotyczących energii fali mechanicznej zajmijmy się ponownie falą poprzeczną rozchodzącą się w strunie. W jaki sposób energia jest przekazywana od jednego kawałka struny do drugiego? Wyobraźmy sobie falę poruszającą się od lewej strony do prawej strony struny i weźmy pod uwagę jakiś punkt na strunie (**Rysunek 20.6**). Część struny na lewo od  $a$  wywiera siłę na strunę na prawo od  $a$  i na odwrót. Na rysunku 20.6b struna na lewo została usunięta i zastąpiona przez siłę  $F$  posiadającą składowe  $F_x$  i  $F_\xi$ . Zwróćmy uwagę, że stosunek  $F_\xi / F$  jest równy ujemnej wartości nachylenia struny  $\partial \xi / \partial x$  w punkcie  $a$ .

$$F_\xi = -F \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \quad 20.17$$

Znak ujemny został postawiony, ponieważ  $F_\xi$  jest ujemne a nachylenie struny dodatnie.

Kiedy punkt a porusza się wzdłuż osi  $\xi$  siła  $F_\xi$  wykonuje pracę nad tym punktem i w rezultacie przekazuje energię na prawo od punktu a. Odpowiadająca tej pracy moc  $P$  (szybkość wykonywania pracy) w punkcie a jest równa iloczynowi składowej pionowej siły  $F_\xi(x,t)$  i składowej pionowej prędkości  $v_\xi(x,t) = \partial\xi/\partial t$  tego punktu:

$$P(x, t) = F_\xi(x, t)v_\xi(x, t) = -F \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \quad 20.18$$

Ta moc jest szybkością przekazywania energii wzdłuż struny. Wartość jej zależy od położenia  $x$  i czasu  $t$ . Zwróćmy uwagę, że energia jest przekazywana tylko w tych punktach, gdzie nachylenie struny jest niezerowe ( $\partial\xi/\partial x \neq 0$ ) w związku z tym istnieje niezerowa składowa poprzeczna siły naprężenia struny i gdzie struna ma różną od zera składową prędkości w kierunku  $\xi$  ( $\partial\xi/\partial t \neq 0$ ), a zatem składowa poprzeczna siły może wykonać pracę.

Równanie 20.18 jest spełnione dla każdej fali sinusoidalnej lub niesinusoidalnej. Dla fali sinusoidalnej funkcja falowa dana jest równaniem na przykład 20.8:

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

i dalej:

$$\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$P(x, t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad 20.19$$

Podstawiając  $\omega = kv$  i  $v^2 = F/\mu$  20.19 możemy przedstawić w postaci:

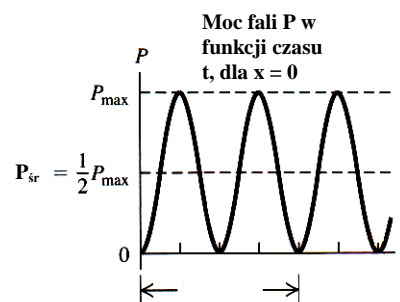
$$P(x, t) = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad 20.20$$

Funkcja  $\sin^2\alpha$  nigdy nie jest ujemna, zatem moc chwilowa fali sinusoidalnej jest albo dodatnia (w punktach, w których energia płynie w kierunku  $+x$ ), lub zero (w punktach, w których nie ma przepływu) (**Rysunek 20.7**).

Maksymalna wartość mocy chwilowej jest wtedy, gdy  $\sin^2(kx - \omega t) = 1$ :

$$P(x, t) = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

Wartość średnią mocy otrzymamy zauważając, że wartość średnia  $\sin^2\alpha$  jest równa  $\frac{1}{2}$ . Stąd wartość średnia mocy:



**Rysunek 20.7**

$$\mathbf{P(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2} \quad 20.21$$

**Średnia moc fali sinusoidalnej w strunie.**

Średnia szybkość przekazywania energii jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i do kwadratu częstości. Taka proporcjonalność jest cechą charakterystyczną fal mechanicznych **różnego typu**, włączając w to na przykład fale sejsmiczne. W przypadku fal mechanicznych szybkość przekazywania energii zwiększa się czterokrotnie, jeżeli amplituda zwiększa się dwukrotnie.

W przypadku fal elektromagnetycznych jest trochę inaczej. Szybkość przekazywania energii jest również proporcjonalna do kwadratu amplitudy, ale nie zależy od  $\omega$ .

### Natężenie fali.

Fale w strunie przenoszą energię w jednym kierunku – wzdłuż struny. Jednak w przypadku innych rodzajów fal, włączając w to fale dźwiękowe i fale sejsmiczne, przenoszą energię one energię we wszystkich kierunkach. W takim przypadku wprowadza się definicję **natężenia fali (I)** zdefiniowaną jako **średnia szybkość z jaką energia jest przenoszona przez falę przez jednostkę powierzchni prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali (propagacji). Czyli natężenie fali jest średnią mocą na jednostkę powierzchni**. Zwykle mierzona jest w jednostkach  $W/m^2$ .

Jeżeli fale rozprzestrzeniają się ze źródła jednakowo we wszystkich kierunkach, to natężenie fali w odległości  $r$  od źródła jest odwrotnie proporcjonalne do  $r^2$  (**Rysunek 20.8**). Wynika to bezpośrednio z zasady zachowania energii. Jeżeli moc wyjściowa źródła wynosi  $P$ , wtedy średnie natężenie w odległości  $r_1$  przez powierzchnię sfery  $4\pi r_1^2$  wynosi:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

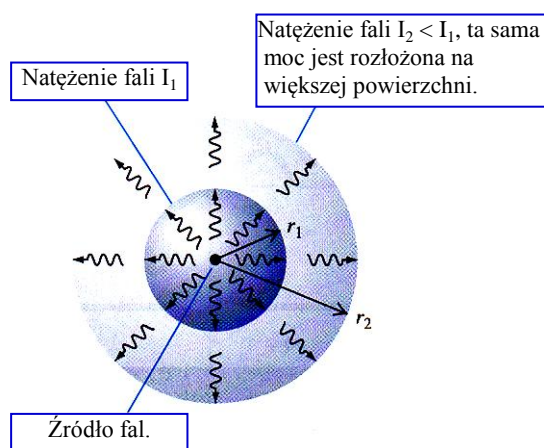
Średnie natężenie fali przez powierzchnię o innym promieniu  $r_2$  jest dane przez takie samo wyrażenie. Jeżeli energia nie jest pochłaniana pomiędzy sferami, to oczywiście moc  $P$  musi być taka sama w obu przypadkach i

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

20.22

**Zależność natężenia fali od odległości.**



**Rysunek 20.8**

Zatem natężenie fali jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od źródła.

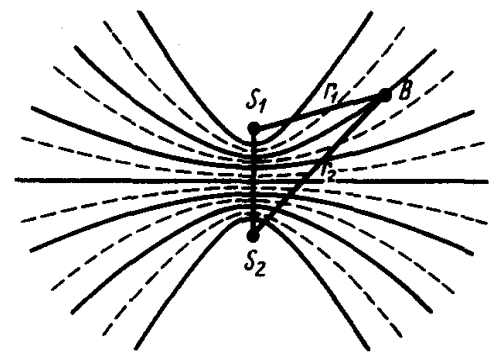
## 20-6 Interferencja fal.

**Spójnością** lub **koherencją** nazywamy zgodny przebieg w czasie i przestrzeni kilku procesów drgających lub falowych. Fale nazywamy **koherentnymi** lub **spójnymi**, jeżeli różnica ich faz pozostaje stała w czasie. Oczywiście jest, że spójnymi mogą być tylko te fale, które mają jednakową częstość. Podczas nakładania się w przestrzeni dwóch (lub kilku) fal spójnych, w pewnych miejscach następuje wzmocnienie lub osłabienie fali wypadkowej. To wzmocnienie lub osłabienie zależy od różnicy faz między falami. Takie zjawisko nazywamy **interferencją fal**.

Rozpatrzmy nałożenie się dwóch fal kulistych wytwarzanych przez dwa źródła punktowe  $S_1$  i  $S_2$  (**Rysunek 20.9**), posiadających jednakowe amplitudy  $A_0$ , częstości  $\omega$  i stałą różnicę faz. Zgodnie z 20.11

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$

$$\xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2),$$



**Rysunek 20.9**

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  – odległości od źródeł do rozpatrywanego punktu B,  $k$  – liczba falowa,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  – fazy początkowe obu nakładających się fal. Amplituda fali wypadkowej w punkcie B będzie równa

$$A^2 = A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}$$

Ponieważ dla źródeł koherentnych różnica faz początkowych  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const.}$ , to wynik interferencji tych dwu fal w różnych punktach zależy dróg od  $\Delta = r_1 - r_2$ .

W punktach, dla których spełniony jest warunek:

$$\boxed{k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad 20.23$$

obserwuje się **maksima interferencyjne**: amplituda wypadkowych drgań będzie równa  $A = A_0/r_1 + A_0/r_2$ . W punktach spełniających warunek

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad 20.24$$

obserwuje się **minima interferencyjne**: amplituda wypadkowych drgań wynosi  $A = |A_0/r_1 - A_0/r_2|$ .  $m = 1, 2, 3, \dots$  nazywamy **rzędem** maksimów lub minimów interferencyjnych.

Równania 20.23 i 20.24 można zapisać krótko:

$$r_1 - r_2 = \text{const}. \quad 20.25$$

Wyrażenie 20.25 jest równaniem hiperboli z ogniskami w punktach  $S_1$  i  $S_2$ . Wynika z tego, że miejsca, w których obserwujemy wzmocnienia albo osłabienia fal leżą na hiperbolach.

## 20.7 Fale stojące.

Szczególnym przypadkiem interferencji są fale stojące. **Fale stojące** są to drgania powstałe w wyniku nałożenia się dwóch sinusoidalnych fal biegnących naprzeciw siebie, które posiadają jednakowe częstotliwości i amplitudy. Napiszmy równania dwu fal płaskich rozchodzących się w przeciwnie strony:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx) \quad 20.26$$

Początek układu współrzędnych został wybrany w punkcie, w którym obie fale mają jednakową fazę, a czas jest liczony od chwili, w której fazy obu fal są równe zero. Dodając do siebie obie fale otrzymamy:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t \quad 20.27$$

Z równania fali stojącej 20.27 wynika, że w każdym punkcie fali stojącej cząstki ośrodka drgają z częstością  $\omega$  i z amplitudą

$$A_{st} = \left| 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right|,$$

która zależy od współrzędnej  $x$ .

W punktach ośrodka, dla których

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad 20.28$$

amplituda fali stojącej osiąga **wartość maksymalną**, równą  $2A$ . W punktach ośrodka, dla których

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad 20.29$$

amplituda fali stojącej osiąga **wartość równą zero**. Punkty, w których amplituda osiąga wartość maksymalną ( $A_{st} = 2A$ ) nazywa się **strzałkami fali stojącej**, a punkty, w których amplituda jest równa zero ( $A_{st} = 0$ ) nazywa się **węzłami fali stojącej**.

Z warunków 20.28 i 20.29 otrzymujemy warunki na położenie węzłów i strzałek:

$$x_{st} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad 20.30$$

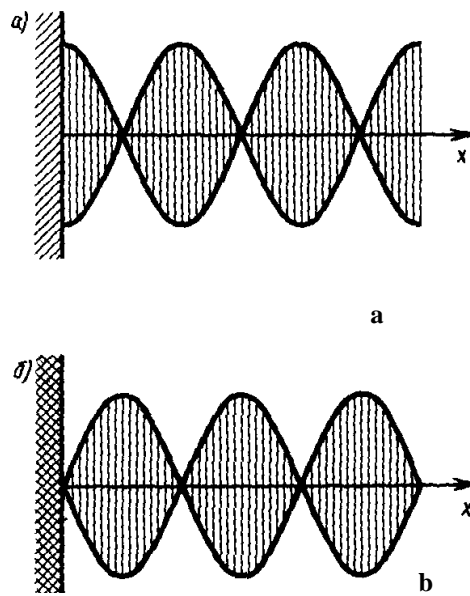
$$x_{we} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad 20.31$$

Z równań 20.30 i 20.31 wynika, że odległość między sąsiednimi strzałkami i sąsiednimi węzłami jest taka sama i wynosi  $\lambda/2$ . Odległość między sąsiednim węzłem i strzałką jest równa  $\lambda/4$ .

W fali biegnącej wszystkie punkty ośrodka drgają z jednakową amplitudą, jednocześnie faza drgań tych punktów zmienia się w sposób ciągły. **W fali stojącej wszystkie punkty**

między węzłami drgają z tą samą fazą, a amplituda drgań zmienia się od punktu do punktu. Przy przejściu przez węzeł mnożnik  $2A \cos(2\pi x / \lambda)$  zmienia znak, i dlatego faza drgań cząstek po obu stronach węzła jest przeciwna.

Praktycznie fale stojące mogą powstawać podczas odbijania się fali od przeszkody. Falę stojącą daje wtedy nałożenie się fali padającej i fali odbitej od przeszkody. Na przykład, jeżeli koniec sznurka umocować nieruchomo, to odbita w miejscu umocowania sznurka fala będzie interferować z falą padającą i w rezultacie powstanie fala stojąca. Na granicy, gdzie następuje odbicie, w tym przypadku otrzymujemy węzeł. W zależności od stosunku gęstości ośrodków, na granicy odbicia powstaje węzeł albo strzałka. Jeżeli ośrodek, od którego następuje odbicie ma mniejszą gęstość, to w miejscu odbicia powstanie strzałka (*Rysunek 20.10a*), jeżeli ma większą gęstość to powstanie węzeł (*Rysunek 20.10b*). Tworzenie się węzła związane jest z tym, że fala, odbijając się od ośrodka gęstszego, zmienia fazę na przeciwną i na granicy zachodzi nałożenie się drgań o kierunkach przeciwnych, a w rezultacie tego powstaje węzeł. Jeżeli fala odbija się od ośrodka rzadszego, to zmiana fazy nie następuje i drgania dodają się z jednakowymi fazami, w rezultacie powstaje strzałka. Jeżeli mamy do czynienia z falą biegnącą to niesie ona z sobą pewną energię związaną z ruchem drgającym cząsteczek ośrodka. W przypadku fali stojącej energia nie jest przenoszona, ponieważ fala padająca i odbita niosą jednakową energię, ale w przeciwnych kierunkach.



*Rysunek 20.10*

## 20.8 Charakterystyka fal dźwiękowych.

**Falami dźwiękowymi** nazywamy rozprzestrzeniające się w ośrodku fale sprężyste posiadające częstotliwości w przedziale od **16Hz** do **20000Hz**. Fale o tych częstotliwościach, oddziałując na narząd słuchowy człowieka, wywołują wrażenie **dźwięku**. Fale o  $f < 16\text{Hz}$  (**infradźwięki**) i o  $f > 20\text{kHz}$  (**ultradźwięki**) nie są odbierane przez człowieka.

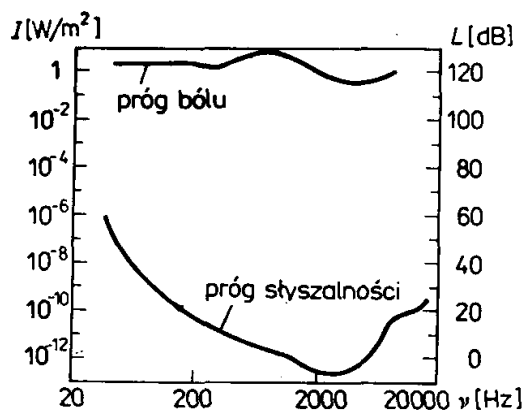


Fala dźwiękowa jest falą podłużną i jest, po prostu, zmieniającym się ciśnieniem powietrza. Można pokazać, że w przypadku fali dźwiękowej sinusoidalnej ciśnienie opisane jest funkcją falową postaci:

$$p(x, t) = BkA \sin(kx - \omega t)$$

gdzie  $B$  jest modułem ścisłości, a  $A$  jest maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi.

**Natężeniem dźwięku** nazywamy wielkość określającą średnią w czasie energię niesioną przez falę dźwiękową, przechodzącą w ciągu jednostki czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali. (Patrz wnioski otrzymane w paragrafie 20.5)



Rysunek 20.11

$$I = \frac{E}{St}$$

Jednostką natężenia dźwięku w układzie SI jest wat na metr do kwadratu ( $\text{W/m}^2$ ).

Wrażliwość ludzkiego ucha jest różna w zależności od częstotliwości dźwięku. Aby wywołać wrażenie dźwięku fala musi posiadać pewne minimalne natężenie. Jeżeli jednak natężenie przekracza pewną wartość, to fala przestaje być odbierana jako dźwięk, wywołuje natomiast uczucie bólu. W rezultacie dla każdej częstotliwości drgań istnieje najmniejsze (**próg słyszalności**) i największe (**próg bólu**) natężenie fali, która wywołuje wrażenie dźwięku. Na **rysunku 20.11** przedstawiona jest zależność progów słyszalności i bólu w funkcji częstotliwości. Obszar zawarty między tymi krzywymi jest obszarem słyszalności.

Podczas gdy natężenie dźwięku jest wielkością obiektywnie charakteryzującą proces falowy, to **głośność** jest wielkością, która charakteryzuje subiektywną intensywność odbierania dźwięku przez człowieka. Zgodnie z prawem Webera – Fechnera, głośność dźwięku wzrasta logarytmicznie wraz z natężeniem dźwięku. Na tej podstawie **poziom głośności** definiuje się jako logarytm stosunku natężenia danego dźwięku  $I$  do natężenia  $I_0$ , przyjętego jako poziom odniesienia:

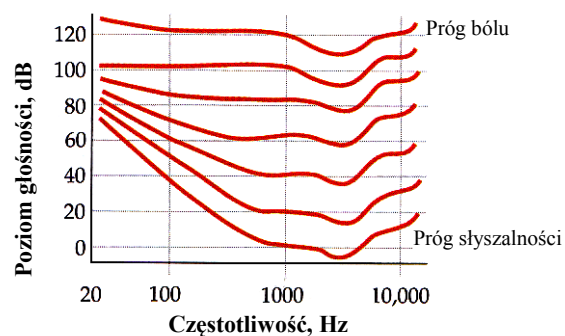
$$L = \log \frac{I}{I_0}$$

Za natężenie odniesienia  $I_0$  przyjmuje się wartość równą  $10^{-12} \text{W/m}^2$  tak, aby próg słyszalności przy częstotliwości 1000Hz dawał poziom zerowy ( $L = 0$ ).

Jednostką głośności jest **bel (B)**. Zwykle jednak używa się jednostek dziesięć razy mniejszych – **decybeli (dB)**. Wartość głośności mierzonej w decybelach określa wzór

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Odczucie głośności dźwięku zależy zarówno od natężenia fali dźwiękowej jak i częstotliwości. **Rysunek 20.12** przedstawia wykresy natężenia fal odbierane jako dźwięki o tej samej głośności. Poziom głośności mierzy się również w **fonach**. Poziom głośności dowolnego dźwięku w fonach jest liczbowo równy poziomowi głośności (wyrażonego w decybelach) tonu o częstotliwości 1kHz, którego głośność jest odbierana jako równa głośności tego dźwięku. Na przykład szum w wagonie kolejki podmiejskiej przy dużej prędkości wynosi około 90fonów, szepc z odległości 1m wynosi około 20fonów.



**Rysunek 20.12**

### Percepcja fal dźwiękowych.

Każdy rzeczywisty dźwięk nie jest prostym drganiem harmonicznym, lecz stanowi złożenie drgań harmonicznymi o określonym zestawie częstotliwości. Taki zestaw częstotliwości drgań odpowiadający danemu dźwiękowi nazywa się jego **widmem akustycznym**. Jeżeli w widmie występują drgania o wszystkich możliwych częstotliwościach z przedziału od  $\nu_1$  do  $\nu_2$ , to widmo nazywamy **ciągłym**. Jeżeli zaś dźwięk składa się z drgań o dyskretnych wartościach częstotliwości  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  itd., to widmo nazywamy **liniowym**. Akustycznym widmem ciągłym charakteryzują się **szумы**. Drgania o widmie liniowym wywołują wrażenie o bardziej lub mniej określonej **wysokości**. Taki dźwięk nazywa się **wielotonem** (dźwiękiem wielotonowym). Wysokość wielotonu określona jest częstotnością podstawową (najniższą). Względne natężenie **przytonów** (tj. drgań o częstotliwościach  $\nu_2, \nu_3$  itd.) decyduje o **barwie** (lub

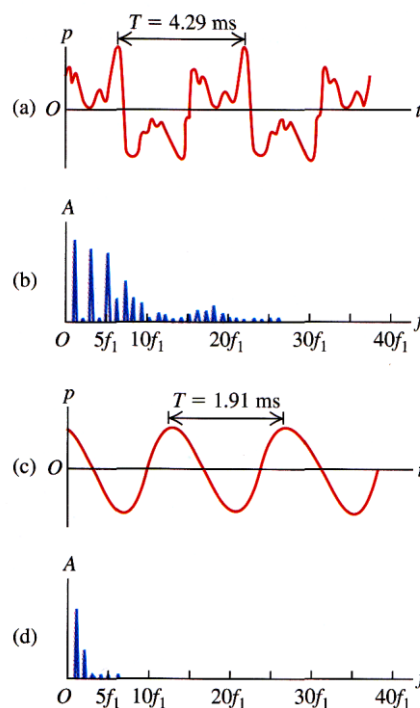
**tembrze**) dźwięku. Różnice w składzie widmowym dźwięków wytwarzanych przez różne instrumenty muzyczne pozwalają rozróżnić „na słuch” na przykład flet od skrzypiec czy fortepianu.

Tak jak stwierdziliśmy głównym czynnikiem wywołującym wrażenie wysokości dźwięku jest częstotliwość, która determinuje odczucie czy dany dźwięk jest wysoki czy niski. Im wyższa częstotliwość tym odczucie o większej wysokości dźwięku. Jednak amplituda ciśnienia fali dźwiękowej również ma wpływ na odczuwanie wysokości. Jeżeli słuchacz porównuje dwa dźwięki wywołane przez fale sinusoidalne o tej samej częstości, wtedy dźwięk o większej amplitudzie powoduje wrażenie głośniejszego ale również nieco wyższego.

Dźwięki instrumentów muzycznych mają na ogół równania fal (funkcje falowe) znacznie bardziej złożone od fal sinusoidalnych. Zmiany ciśnienia w fali dźwiękowej wydawanej przez klarnet przedstawione są na **rysunku 20.13a**. Przebieg ten jest dlatego tak skomplikowany, ponieważ słup powietrza drga z częstotliwością podstawową (pierwszą harmoniczną) i jednocześnie z częstotliwościami wyższymi (wyższymi harmonicznymi). **Rysunek 20.13b** pokazuje składowe częstości dla klarnetu. Metoda matematyczna rozkładu złożonej zależności ciśnienia fali dźwiękowej od czasu na sinusoidalne fale o częstościach będących wielokrotnością częstości podstawowej (pierwszej harmoniczej) nazywa się analizą Fouriera.

Dwa dźwięki wydawane przez dwa różne instrumenty mogą mieć tę samą częstość podstawową, ale brzmieć różnie z powodu różnej zawartości wyższych harmonicznymi. Jak było powiedziane wcześniej, zawartość wyższych harmonicznymi w danym złożonym dźwięku decyduje o tonie (barwie) dźwięku. Dźwięk bogaty w wyższe harmoniczne taki jak dźwięk klarnetu z rysunku 20.13a lub 20.10b określamy często mianem ciepły, natomiast dźwięk składający się w przeważającej mierze z pierwszej harmoniczej jak zapis altu na **rysunku 20.13c** określamy czasem terminem cienki.

Źródłem dźwięku może być dowolne ciało, drgające w ośrodku sprężystym z częstością akustyczną (na przykład struna w instrumentach strunowych). Ciało, wykonując



**Rysunek 20.13**

drgania, powoduje powstawanie drgań w otaczającym ośrodku z taką samą częstotliwością. Drgania te rozchodzą się coraz dalej od źródła w postaci fali akustycznej z określoną prędkością zależną od własności sprężystych ośrodka. Prędkość rozchodzenia się dźwięku w gazach określona jest wzorem

$$v = \sqrt{\gamma RT / M} \quad 20.32$$

gdzie  $R$  – stała gazowa,  $M$  – masa cząsteczkowa,  $\gamma = C_p / C_v$  - wykładnik adiabaty,  $T$  – temperatura termodynamiczna. Ze wzoru 20.32 wynika, że prędkość dźwięku nie zależy od ciśnienia gazu  $p$ , wzrasta jednak wraz ze wzrostem temperatury. Im większa masa cząsteczkowa gazu, tym mniejsza prędkość rozchodzącego się w nim dźwięku. Na przykład w temperaturze  $T = 273\text{K}$  prędkość dźwięku w powietrzu ( $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{kg/mol}$ ) wynosi  $331\text{m/s}$ , a w wodorze ( $M = 2 \cdot 10^{-3} \text{kg/mol}$ ) jest równa  $1260\text{m/s}$ .

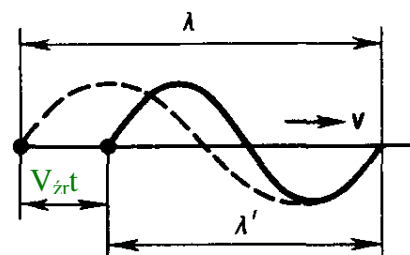
## 20.9 Efekt Dopplera dla fal dźwiękowych.

**Efekt Dopplera nazywamy zmianę częstotliwości drgań, rejestrowanych przez odbiornik, podczas ruchu źródła tych drgań i odbiornika względem siebie.** Na przykład z doświadczenia wiadomo, że częstość dźwięku wydawanego przez jadący samochód wyścigowy zwiększa się podczas przybliżania samochodu do obserwatora i zmniejsza się podczas oddalania od niego.

W celu analizy efektu Dopplera załóżmy, że źródło i odbiornik dźwięku poruszają się wzdłuż łączącej je linii odpowiednio z prędkościami  $v_{zr}$  i  $v_{od}$ , przy czym prędkości te są dodatnie, jeżeli źródło (odbiornik) zbliża się do odbiornika (źródła) i są ujemne, jeżeli się oddala. Niech prędkość drgań źródła wynosi  $v_0$ .

**1. Odbiornik zbliża się do źródła, a źródło spoczywa.** Tzn.  $v_{od} > 0$ , a  $v_{zr} = 0$ . W tym przypadku prędkość rozchodzenia się fali względem odbiornika wynosi  $v + v_{od}$ . Ponieważ długość fali nie ulega zmianie, to

$$v' = \frac{v + v_{od}}{\lambda} = \frac{v + v_{od}}{vT} = \frac{(v + v_{od})v_0}{v}$$



Rysunek 20.14

co oznacza, że częstotliwość drgań rejestrowanych przez odbiornik jest  $(v + v_{od})/v$  razy większa od częstości drgań źródła.

**2. Źródło zbliża się do odbiornika, a odbiornik spoczywa.** Tzn.  $v_{od} = 0$ , a  $v_{zr} > 0$ . Prędkość rozchodzenia się drgań zależy tylko od własności ośrodka, dlatego w czasie równym okresowi drgań źródła, wysłana fala przez źródło przebędzie w kierunku do odbiornika odległość  $vT$  (równą długości fali  $\lambda$ ) niezależnie od tego, czy źródło porusza się czy nie. W tym czasie źródło przebędzie drogę  $v_{zr}T$  (**Rysunek 20.14**). Oznacza to, że długość fali w kierunku ruchu ulegnie skróceniu i będzie równa  $\lambda' = \lambda - v_{zr}T = (v - v_{zr})T$  i

$$v = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{zr})T} = \frac{v v_0}{v - v_{zr}},$$

tzn. częstość drgań, rejestrowanych przez odbiornik, zwiększy się  $v/(v - v_{zr})$  razy.

W przypadkach 1 i 2, jeżeli  $v_{zr} < 0$  i  $v_{od} < 0$  znak będzie odwrotny.

**3. Źródło i odbiornik poruszają się.** Wykorzystując wyniki otrzymane w przypadku 1 i 2 można, w przypadku ogólnym, zapisać wyrażenie na częstość drgań rejestrowanych przez odbiornik:

$$v = \frac{(v \pm v_{od})}{v \mp v_{zr}} v_0 \quad 20.33$$

Znak plus w liczniku odpowiada zbliżaniu się odbiornika do źródła, znak minus – jego oddalaniu od źródła, znak minus w mianowniku odpowiada zbliżaniu się źródła do odbiornika, a znak plus – oddalaniu się źródła od odbiornika.