Przykładowy Egzamin z Matematyki, Semestr II

1)

☐ a) $\int \frac{\sqrt{x}+2xt^3-2}{t}dt =$........................

☐ b) Jeżeli $\int f(x)dx = \ln \frac{x}{1+2x} + C$ to $f(x) =$........................

☐ c) $\int\limits_0^3 e^{|2-x|}dx =$........................

2)

☐ a) Czy $\int fg'dx = fg - \int f'g$? (wzór na całkowanie przez części)

☐ b) Czy $\int f'gdx = fg - \int fg'$? (wzór na całkowanie przez części)

☐ c) Stosując tw. o całkowaniu przez podstawienie dla całek oznaczonych, zapisać całkę $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x}dx$ po dokonaniu podstawienia (NIC nie obliczać)........................

3) Niech $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wówczas

☐ a) $\int\limits_0^\infty f(x)dx = \frac{\pi}{2}$

☐ b) $\int\limits_0^\infty xf(x)dx = \infty$

☐ c) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{f(x)} =$........................

4) Suma

☐ a) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ wynosi $\frac{x}{2-x}$ dla $|x| < 2$

☐ b) szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ wynosi $\frac{1}{2}$

☐ c) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1}$ wynosi .... dla $|x| < 2$.

5) Wiemy, że pewna funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 ma w punkcie $(-1, 2)$ maksimum lokalne. Wówczas:

☐ a) $f'_x(-1, 2) \geq f'_y(x, y)$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

☐ b) $f'_x(-1, 2) - f'_y(-1, 2) = 0$

☐ c) funkcja przeciwna do funkcji f posiada w tym punkcie (maksimum lokalne, minimum lokalne, trudno określić)

6) Dane jest równanie różniczkowe $y' = 2yctgx - \cos x$. Wówczas

☐ a) funkcja $y = \cos x$, $x \in (0, \pi)$ jest rozwiązaniem tego równania

☐ b) funkcja $y = \sin x$, $x \in (0, \pi)$ jest rozwiązaniem tego równania

☐ c) jest to równanie................................ (nazwij typ równania)

7) Czy dla podanych równań "przewidziano"prawidłowe rozwiązania szczególne ?

☐ a) Dla równania $y'' + y' = x^2$ przewidywana postać y_s to $y_s = ax^2 + bx + c$

☐ b) Dla równania $y' + 2y = 4xe^{-2x}$ przewidywana postać y_s to $y_s = \left(ax^2 + bx\right)e^{-2x}$

☐ c) Dla równania $y' + 2y = 4x - 3e^{-2x}$ przewidywana postać y_s to $y_s =$........................

8) Niech $I = \iint\limits_D dxdy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (-2, 2)$, $C = (0, 2)$. Wówczas

☐ a) $I = 2$

☐ b) $I = \int\limits_{-2}^{0} \left(\int\limits_{-x}^{2} dy \right) dx$

☐ c) $I = \int\limits_{?}^{?} \left(\int\limits_{?}^{?} dx \right) dy =$........................

9) Dany jest zbiór $D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$.

☐ a) Czy $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \frac{16}{3}\pi$?

☐ b) Czy $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = 8\pi$?

☐ c) Zamienić $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint\limits_\Delta$ .... $drd\alpha$, jeżeli $x = r\cos\alpha$ i $y = r\sin\alpha$ oraz $\Delta = \{(r, \alpha) \colon$ ....$\}$

10) Niech $I = \int\limits_K xy^2 dl$, gdzie $K : \ x = -1 + t, \ y = 1 + t, \ 0 \leq t \leq 2$. Wówczas

☐ a) $I = \int\limits_0^2 (-1 + t)(1 + t)^2 dt$

☐ b) $I = \sqrt{2}\int\limits_0^2 (-1 + t)(1 + t)^2 dt$

☐ c) Przedstawić K w postaci funkcji $y(x) =$ ...., gdzie $x \in [\ldots, \ldots]$