Równania różnicowe

1 Wiadomości wstępne

Umówmy się, że na czas tego wykładu zrezygnujemy z oznaczania n-tego wyrazu ciągu symbolem typu x_n, y_n itp. Zamiast tego pisać będziemy $x(n)$, $y(n)$ itp. Ponadto wprowadzimy symbol na oznaczenie iloczynu pewnej ilości wyrazów ciągu analogiczny do "sigmy" oznaczającej sumę. Mianowicie,

$$\prod_{i=1}^{n} a(i) = a(1) \cdot a(2) \cdot \dots \cdot a(n).$$

Dodatkowo umawiamy się, że powyższy iloczyn po pustym zbiorze indeksów, czyli na przykład $\prod_{i=1}^{0} a(i)$, jest równy 1.

Wprowadzimy pewne pojęcia, które będą przydatne w dalszym omawianiu tematu.

Definicja 1.1. *Operatorem różnicowym nazywamy operator określony na ciągach za pomocą wzoru*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n).$$

Operatorem przesunięcia nazywamy operator określony na ciągach wzorem

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Operator I dany wzorem

$$Ix(n) = x(n)$$

nazywamy operatorem identycznościowym.

Uwaga 1.2. Zauważmy, że wprost z powyższej definicji wynika następujący związek:

$$\Delta x(n) = (E - I)\, x(n).$$

Uwaga 1.3. Wprost z definicji operatora E wynika, że jeżeli $b \in \mathbb{R}$, to

$$E(bx(n)) = b \cdot Ex(n)$$

Uwaga 1.4. W dalszym ciągu dla liczby rzeczywistej λ będziemy używać zapisu $E - \lambda$ zamiast $E - \lambda I$.

Zastanówmy się co daje wielokrotne zastosowanie operatora przesunięcia. Mamy

$$E^2x(n) = E(Ex(n)) = Ex(n+1) = x(n+2),$$
$$E^3x(n) = E\left(E^2x(n)\right) = Ex(n+2) = x(n+3).$$

Widać, że indukcyjnie daje się wykazać ogólny wzór

$$E^kx(n) = x(n+k) \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli więc

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k$$

jest dowolnym wielomianem stopnia k zmiennej λ, to możemy określić operator wielomianowy $p(E)$ określony za pomocą wzoru

$$p(E) = a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI,$$

który na ciągu $x(n)$ przyjmuje wartość

$$p(E)\,x(n) = a_0x(n+k) + a_1x(n+k-1) + \cdots + a_kx(n).$$

Pokażemy teraz pewną własność operatora Δ. Niech

$$p(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k$$

będzie wielomianem stopnia k. Wówczas

$$\begin{aligned}\Delta p(n) &= \left[a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \cdots + a_k\right] - \left[a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k\right] \\ &= a_0kn^{k-1} + (\text{ składniki stopnia } < k-1).\end{aligned}$$

Podobnie można pokazać, że

$$\Delta^2p(n) = a_0k(k-1)\,n^{k-2} + (\text{ składniki stopnia } < k-2).$$

Powtarzając tę operację k-krotnie, dostajemy

$$\Delta^kp(n) = a_0k!. \tag{1}$$

Stąd dalej

$$\Delta^{k+i}p(n) = 0 \text{ dla } i \geqslant 1. \tag{2}$$

Zachodzi następujący

Lemat 1.5. *Jeżeli p jest dowolnym wielomianem i $g(n)$ jest dowolnym ciągiem, to*

$$p(E)\left(b^ng(n)\right) = b^np(bE)\,g(n) \tag{3}$$

dla dowolnej liczby b.

Dowód. Oznaczmy symbolem L lewą, zaś symbolem P prawą stronę równości. Mamy wówczas na mocy Uwagi 1.3

$$\begin{aligned}L = p(E)\left(b^n g(n)\right) &= a_0 b^{n+k} g(n+k) + a_1 b^{n+k-1} g(n+k-1) + \cdots + a_k b^n g(n) \\ &= b^n \left(a_0 b^k g(n+k) + a_1 b^{k-1} g(n+k-1) + \cdots + a_k g(n)\right) \\ &= b^n p(bE)\, g(n) = P.\end{aligned}$$

□

Wprowadźmy dodatkowo pewne szczególne działanie na liczbach rzeczywistych. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$. Określamy

$$x^{(k)} = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

Zauważmy, że jeśli $x = n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant k$, to

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

W szczególności, $n^{(n)} = n!$. Jeśli $n < k$, to $n^{(k)} = 0$.

Będziemy także potrzebować wzoru na tzw. *wyznacznik Vandermonde'a*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (\lambda_j - \lambda_i), \tag{4}$$

gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Dodatkowo zachodzi następujące twierdzenie o uogólnionym wyznaczniku Vandermonde'a:

Twierdzenie 1.6. *Niech V będzie macierzą kwadratową stopnia k złożoną z r bloków postaci*

$$V_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & \binom{2}{1}\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \lambda_i^3 & \binom{3}{1}\lambda_i^2 & \binom{3}{2}\lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i^{m_i-1} & \binom{m_i-1}{1}\lambda_i^{m_i-2} & \binom{m_i-1}{2}\lambda_i^{m_i-3} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i^{k-1} & \binom{k-1}{1}\lambda_i^{k-2} & \binom{k-1}{2}\lambda_i^{k-3} & \dots & \binom{k-1}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i} \end{bmatrix}$$

wymiaru $k \times m_i$, gdzie $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$ ($V = \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_r \end{bmatrix}$). Wówczas

$$\det V = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_i m_j}.$$

Następującym przykładem zilustrujemy czym są równania różnicowe.

Przykład 1.7. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ populacja liczy $P(0)$ osób. Roczny wskaźnik urodzeń wynosi $b = \frac{1}{100}$, a roczna umieralność $d = \frac{1}{101}$. Oznacza to, że jeżeli w końcu n-tego roku żyje $P(n)$ osób, to w następnym roku urodzi się $\frac{P(n)}{100}$ dzieci i umrze $\frac{P(n)}{101}$ osób. Zatem liczba osób żyjących na koniec $(n+1)$-ego roku wyniesie

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) + \frac{P(n)}{100} - \frac{P(n)}{101} \\ &= P(n) \cdot (1 + b - d) = P(n) \cdot \left(1 + \frac{1}{10100}\right). \end{aligned}$$

Zachodzi pytanie, czy z tego związku potrafimy wyznaczyć wzór na wyraz ogólny ciągu $(P(n))$. Jeżeli wprowadzimy oznaczenie $r = b - d$, to nasz związek przyjmie postać

$$P(n+1) = P(n) \cdot (1 + r). \tag{5}$$

Jest to przykład równania różnicowego (tzw. *równania wzrostu*) opisującego przyrost populacji. Na początek odgadniemy rozwiązanie. Twierdzimy, że rozwiązaniem jest każdy ciąg postaci

$$P(n) = A(1+r)^n \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie A jest dowolną stałą. Sprawdzamy, że to jest rozwiązanie równania (5):

$$L = A(1+r)^{n+1} \ , \ P = A(1+r)^n (1+r) = A(1+r)^{n+1},$$

czyli $L = P$. Jest to tak zwane rozwiązanie ogólne równania (5). Rozwiązania ogólne zawsze zawierają dowolne stałe. Podstawiając w ich miejsce konkretne liczby, otrzymujemy tzw. rozwiązania szczególne. Aby dla danego problemu uzyskać właściwe rozwiązanie szczególne, potrzebne są tak zwane warunki początkowe. Warunek początkowy jest dodatkową porcją informacji, która pozwoli wyznaczyć nieokreślone stałe. Na przykład w naszym modelu wzrostu możemy dowiedzieć się, że populacja w chwili 0 liczy 100 osób, czyli $P(0) = 100$. Znaczy to, że

$$100 = P(0) = A(1+r)^0 = A,$$

a więc właściwym dla naszego problemu rozwiązaniem szczególnym będzie

$$P(n) = 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10100}\right)^n.$$

Widać więc, że równanie różnicowe będzie związkiem między kilkoma (niekoniecznie dwoma, jak w powyższym przykładzie) kolejnymi wyrazami ciągu, zaś jego rozwiązanie będzie polegać na wyznaczeniu wzoru na n-ty wyraz tego ciągu. Inaczej, rozwiązanie równania różnicowego jest wyznaczeniem wzoru na n-ty wyraz, gdy ciąg zadany jest rekurencyjnie.

W naszym wykładzie zajmować się będziemy tylko szczególnym rodzajem równań różnicowych, mianowicie równaniami liniowymi.

2 Ogólna teoria liniowych równań różnicowych

Definicja 2.1. *Równaniem liniowym rzędu k nazywamy równanie różnicowe postaci*

$$y(n+k)+p_1(n)\,y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)\,y(n)=g(n)\,, \tag{6}$$

gdzie $p_i(n)$ dla $i=1,2,\ldots,k$ oraz $g(n)$ są ciągami określonymi dla $n\geqslant n_0$ przy pewnym ustalonym n_0 (w naszym wykładzie najczęściej $n_0=0$), przy czym $p_k(n)\neq 0$ dla $n\geqslant n_0$. W równaniu powyższym niewiadomą jest ciąg $y(n)$, zaś pozostałe ciągi są dane. Rozwiązaniem równania (6) nazywamy każdy ciąg $y(n)$ określony dla $n\geqslant n_0$, który spełnia to równanie. Jeżeli $g(n)=0$ dla wszystkich $n\geqslant n_0$, to równanie (6) nazywamy jednorodnym. W przeciwnym przypadku równanie to nazywamy niejednorodnym. Jeżeli równanie (6) jest niejednorodne, to równanie jednorodne postaci

$$y(n+k)+p_1(n)\,y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)\,y(n)=0 \tag{7}$$

nazywamy równaniem jednorodnym stowarzyszonym z równaniem (6).

Zauważmy, że równanie (6) można zapisać w postaci

$$y(n+k)=-p_1(n)\,y(n+k-1)-\cdots-p_k(n)\,y(n)+g(n)\,, \tag{8}$$

z której przy $n_0=0$ kładąc $n=0$, otrzymujemy

$$y(k)=-p_1(0)\,y(k-1)-p_2(0)\,y(k-2)-\cdots-p_k(0)\,y(0)+g(0)\,,$$

czyli k-ty wyraz szukanego ciągu jest dobrze określony przez wyrazy poprzednie $y(0),\ldots,y(k-1)$. Jeżeli znamy już $y(k)$, to kładąc we wzorze (8) $n=1$ mamy

$$y(k+1)=-p_1(1)\,y(k)-p_2(1)\,y(k-1)-\cdots-p_k(1)\,y(1)+g(1)\,,$$

czyli potrafimy z kolei obliczyć $y(k+1)$. Powtarzając ten proces możemy obliczyć wszystkie $y(n)$ dla $n\geqslant k$.

Zilustrujmy powiedziane wyżej za pomocą przykładu.

Przykład 2.2. Rozważmy równanie liniowe trzeciego rzędu postaci

$$y(n+3)-\frac{n}{n+1}y(n+2)+ny(n+1)-3y(n)=n\ ,\ n\geqslant 1. \tag{9}$$

Załóżmy, że $y(1)=0$, $y(2)=-1$ i $y(3)=1$. Obliczymy kolejne wyrazy ciągu $y(n)$. Zapiszmy równanie (9) w równoważnej postaci

$$y(n+3)=\frac{n}{n+1}y(n+2)-ny(n+1)+3y(n)+n. \tag{10}$$

Podstawiając $n=1$ w (10), dostajemy

$$y(4)=\frac{1}{2}y(3)-y(2)+3y(1)+1=\frac{5}{2}.$$

Dla $n = 2$
$$y(5) = \frac{2}{3} y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 = -\frac{4}{3}.$$
Dla $n = 3$
$$y(6) = \frac{3}{4} y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 = -\frac{5}{2}.$$
Dla $n = 4$
$$y(7) = \frac{4}{5} y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 = \frac{89}{6} \text{ itd.}$$

Jeżeli do równania różnicowego dołączymy dodatkowo pierwszych k wartości szukanego rozwiązania, to otrzymamy tzw. *zagadnienie początkowe*:

$$y(n+k) + p_1(n) y(n+k-1) + \cdots + p_k(n) y(n) = g(n), \tag{11}$$
$$y(n_0) = a_0 \ , \ y(n_0+1) = a_1 \ , \ldots , \ y(n_0+k-1) = a_{k-1}, \tag{12}$$

gdzie a_i są ustalonymi liczbami dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Z powyższych rozważań otrzymujemy następujące

Twierdzenie 2.3. *Zagadnienie początkowe (11) i (12) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $y(n)$.*

Pozostaje pytanie czy potrafimy wyznaczyć wzór na n-ty wyraz ciągu spełniającego równanie (6) lub spełniającego zagadnienie początkowe (11) i (12).

Zajmiemy się w pierwszej kolejności równaniem liniowym jednorodnym rzędu k postaci

$$x(n+k) + p_1(n) x(n+k-1) + \cdots + p_k(n) x(n) = 0, \tag{13}$$

gdzie $p_k(n) \neq 0$ dla $n \geqslant n_0$.

Zaczniemy od wprowadzenia ważnych pojęć

Definicja 2.4. *Ciągi $f_1(n), \ldots, f_r(n)$ nazywamy liniowo zależnymi dla $n \geqslant n_0$, gdy istnieją stałe $a_1, \ldots, a_r$ nie wszystkie równe zeru, takie, że*

$$a_1 f_1(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0 \ \textit{dla} \ n \geqslant n_0. \tag{14}$$

Wyrażenie stojące po lewej stronie równości (14) nazywamy *kombinacją liniową* ciągów $f_1(n), \ldots, f_r(n)$. Zauważmy, że jeżeli $a_j \neq 0$, to dzieląc równość (14) przez a_j, dostajemy

$$\begin{aligned} f_j(n) &= -\frac{a_1}{a_j} f_1(n) - \frac{a_2}{a_j} f_2(n) - \cdots - \frac{a_r}{a_j} f_r(n) \\ &= -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \end{aligned} \tag{15}$$

To ostatnie równanie mówi nam, że ciąg f_j z niezerowym współczynnikiem jest kombinacją liniową pozostałych ciągów f_i. Stąd w szczególności dwa ciągi f_1, f_2 są liniowo zależne, gdy jeden z nich równy jest iloczynowi pewnej liczby przez drugi.

Jeżeli nie jest spełniony warunek Definicji 2.4, to ciągi $f_1(n), \ldots, f_r(n)$ nazywamy *liniowo niezależnymi.* Inaczej, ciągi te nazywamy liniowo niezależnymi, gdy z równości

$$a_1 f_1(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0$$

dla $n \geqslant n_0$ wynika, że $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$.

Zilustrujmy powyższe pojęcia za pomocą przykładu:

Przykład 2.5. Pokażemy, że ciągi $3^n, n3^n, n^2 3^n$ są liniowo niezależne dla $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że dla stałych a_1, a_2 i a_3 mamy

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0 \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Dzieląc przez 3^n mamy

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0 \text{ dla wszystkich } n \geqslant 1.$$

To jest możliwe tylko w przypadku, gdy $a_3 = 0$, bo trójmian kwadratowy ma co najwyżej dwa pierwiastki rzeczywiste. Stąd dalej mamy $a_2 = 0$, bo wielomian stopnia 1 ma co najwyżej jeden pierwiastek, a stąd dalej $a_1 = 0$. Zatem mamy liniową niezależność.

Definicja 2.6. *Zbiór k liniowo niezależnych rozwiązań równania (13) nazywamy fundamentalnym zbiorem rozwiązań.*

Podamy teraz praktyczniejszą metodę sprawdzania liniowej niezależności rozwiązań.

Definicja 2.7. *Kasoratianem $W(n)$ rozwiązań $x_1(n), \ldots, x_r(n)$ nazywamy wyznacznik dany przez*

$$W(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \ldots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \ldots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \ldots & x_r(n+r-1) \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Przykład 2.8. Rozważmy równanie różnicowe

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

Pokażemy, że ciągi 1, $(-3)^n$ i 2^n są rozwiązaniami tego równania i obliczymy dla nich kasoratian. Najpierw sprawdzamy, czy to są rozwiązania, podstawiając te ciągi do równania. Dla ciągu $x(n) = 1$ mamy $L = 1 - 7 + 6 = 0 = P$. Dla ciągu $x(n) = (-3)^n$ mamy

$$L = (-3)^{n+3} - 7(-3)^{n+1} + 6(-3)^n = (-3)^n [-27 + 21 + 6] = 0 = P.$$

Wreszcie dla ciągu $x(n) = 2^n$ mamy

$$L = 2^{n+3} - 7 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n = 2^n [8 - 14 + 6] = 0 = P.$$

Obliczamy teraz kasoratian:

$$
\begin{aligned}
W(n) &= \begin{vmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} - (-3)^n \begin{vmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{vmatrix} + 2^n \begin{vmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{vmatrix} \\
&= 2^{n+2}(-3)^{n+1} - 2^{n+1}(-3)^{n+2} - (-3)^n \left(2^{n+2} - 2^{n+1}\right) \\
&\qquad + 2^n \left((-3)^{n+2} - (-3)^{n+1}\right) \\
&= -12 \cdot 2^n (-3)^n - 18 \cdot 2^n (-3)^n - 4 \cdot 2^n (-3)^n + 2 \cdot 2^n (-3)^n \\
&\qquad + 9 \cdot 2^n (-3)^n + 3 \cdot 2^n (-3)^n = -20 \cdot 2^n (-3)^n .
\end{aligned}
$$

Lemat 2.9 (Lemat Abela)**.** *Niech $x_1(n), \ldots, x_k(n)$ będą rozwiązaniami równania (13) i niech $W(n)$ będzie ich kasoratianem. Wówczas dla $n \geqslant n_0$ zachodzi wzór*

$$
W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0) . \tag{17}
$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód dla $k = 3$. W ogólnym przypadku dowód przeprowadza się w pełni analogicznie. Niech $x_1(n)$, $x_2(n)$ i $x_3(n)$ będą rozwiązaniami równania (13). Wówczas ze wzoru (16) mamy

$$
W(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+3) & x_2(n+3) & x_3(n+3) \end{vmatrix} . \tag{18}
$$

Z równania (13) dla $1 \leqslant i \leqslant 3$ mamy

$$
x_i(n+3) = -p_3(n)\, x_i(n) - \left[p_1(n)\, x_i(n+2) + p_2(n)\, x_i(n+1)\right] . \tag{19}
$$

Jeżeli teraz użyjemy wzoru (19) wstawiając do wyznacznika (18) w ostatnim wierszu zamiast $x_i(n+3)$ prawą stronę tego wzoru i korzystając z odpowiednich własności wyznacznika, to otrzymamy

$$
\begin{aligned}
W(n+1) &= \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ -p_3(n)\, x_1(n) & -p_3(n)\, x_2(n) & -p_3(n)\, x_3(n) \end{vmatrix} \\
&= -p_3(n) \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \end{vmatrix} \qquad (20) \\
&= -p_3(n)(-1)^2 \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \end{vmatrix} .
\end{aligned}
$$

Mamy więc

$$W(n+1) = (-1)^3 p_3(n) W(n). \tag{21}$$

Ze wzoru (21) przez prostą indukcję otrzymujemy

$$W(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i)\right] W(n_0) = (-1)^{3(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i)\right] W(n_0).$$

□

Zauważmy teraz, że jeśli równanie (13) ma stałe współczynniki $p_1, p_2, \ldots, p_k$, to wzór (17) przyjmuje postać

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{n-n_0} W(n_0). \tag{22}$$

Ze wzoru (17) wynika następujący wniosek

Wniosek 2.10. *Załóżmy, że $p_k(n) \neq 0$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Wówczas kasoratian $W(n)$ jest różny od 0 dla każdego $n \geqslant n_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(n_0) \neq 0$.*

Z wniosku powyższego wynika, że aby sprawdzić, czy $W(n) \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wystarczy sprawdzić, czy $W(0) \neq 0$. Oczywiście czasami zamiast wartości w 0 bierzemy wartość w jakiejś wygodniejszej liczbie naturalnej n_0.

Rozważmy k rozwiązań $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ równania (13). Przypuśćmy, że dla pewnych stałych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + a_k x_k(n) = 0 \text{ dla wszystkich } n \geqslant n_0.$$

Do tego równania możemy dopisać jeszcze $k-1$ następujących równań

$$\begin{gathered} a_1 x_1(n+1) + a_2 x_2(n+1) + \cdots + a_k x_k(n+1) = 0, \\ \vdots \\ a_1 x_1(n+k-1) + a_2 x_2(n+k-1) + \cdots + a_k x_k(n+k-1) = 0. \end{gathered}$$

Otrzymany układ k równań możemy zapisać w postaci macierzowej jako

$$X(n)\xi = 0, \tag{23}$$

gdzie

$$X(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \ldots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \ldots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \ldots & x_k(n+k-1) \end{bmatrix},$$

oraz

$$\xi = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że $W(n) = \det X(n)$.

Teoria rozwiązywania układów równań liniowych mówi nam, że równanie (23) ma wyłącznie rozwiązanie zerowe ($a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $X(n)$ jest nieosobliwa, czyli gdy $W(n) \neq 0$. Zatem, uwzględniając Wniosek 2.10, uzasadniliśmy twierdzenie

Twierdzenie 2.11. *Zbiór rozwiązań $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ równania (13) rzędu k jest zbiorem fundamentalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi $W(n_0) \neq 0$.*

Przykład 2.12. Sprawdzimy, że $\{n, 2^n\}$ jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1} x(n+1) + \frac{2n}{n-1} x(n) = 0.$$

Podstawiając do równania ciąg $x_1(n) = n$, dostajemy

$$L = n+2-\frac{3n-2}{n-1}(n+1)+\frac{2n}{n-1}n = \frac{n^2+n-2-3n^2-n+2+2n^2}{n-1} = 0 = P.$$

Podstawiając teraz ciąg $x_2(n) = 2^n$, mamy

$$L = 2^{n+2} - \frac{3n-2}{n-1}2^{n+1} + \frac{2n}{n-1}2^n = 2^n\frac{4n-4-6n+4+2n}{n-1} = 0 = P.$$

Ponieważ równanie nie ma sensu dla $n = 1$, więc przyjmiemy $n_0 = 2$. Skoro

$$W(n) = \begin{vmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{vmatrix},$$

więc

$$W(2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Stąd na mocy Twierdzenia 2.11 ciągi n, 2^n dla $n \geqslant 2$ stanowią zbiór fundamentalny rozwiązań danego równania.

Przykład 2.13. Rozważmy równanie rzędu trzeciego postaci

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

Pokażemy, że ciągi 2^n, $(-2)^n$ i $(-3)^n$ tworzą zbiór fundamentalny rozwiązań tego równania. Sprawdzamy najpierw, że są to rozwiązania danego równania: dla ciągu 2^n mamy

$$L = 2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 4 \cdot 2^{n+1} - 12 \cdot 2^n = 2^n(8+12-8-12) = 0 = P,$$

dla ciągu $(-2)^n$ mamy

$$L = (-2)^{n+3} + 3\cdot(-2)^{n+2} - 4\cdot(-2)^{n+1} - 12\cdot(-2)^n$$
$$= (-2)^n(-8+12+8-12) = 0 = P,$$

i dla ciągu $(-3)^n$ mamy

$$L = (-3)^{n+3} + 3\cdot(-3)^{n+2} - 4\cdot(-3)^{n+1} - 12\cdot(-3)^n$$
$$= (-3)^n(-27+27+12-12) = 0 = P.$$

Aby stwierdzić liniową niezależność, obliczymy kasoratian

$$W(n) = \begin{vmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{vmatrix}.$$

Stąd

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Na mocy Twierdzenia 2.11 podane rozwiązania tworzą zbiór fundamentalny rozwiązań.

Jesteśmy teraz gotowi, aby sformułować podstawowe twierdzenie dla równań jednorodnych.

Twierdzenie 2.14 (Twierdzenie podstawowe)**.** *Jeżeli $p_k(n) \neq 0$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$, to równanie (13) posiada fundamentalny zbiór rozwiązań dla $n \geqslant n_0$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2.3 istnieją rozwiązania $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ takie, że

$$x_i(n_0 + i - 1) = 1$$

oraz

$$x_i(n_0) = x_i(n_0+1) = \cdots = x_i(n_0+i-2) = x_i(n_0+i)$$
$$= \cdots = x_i(n_0+k-1) = 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Stąd wynika, że $W(n_0) = 1$, gdyż jest to wyznacznik macierzy jednostkowej. Z Twierdzenia 2.11 wynika teraz, że $\{x_1(n), \ldots, x_k(n)\}$ jest zbiorem fundamentalnym rozwiązań. □

Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele zbiorów fundamentalnych rozwiązań. Następny wynik pokazuje metodę generowania rozwiązań, gdy dany jest pewien fundamentalny zbiór rozwiązań.

Lemat 2.15. *Niech $x_1(n)$ i $x_2(n)$ będą rozwiązaniami równania (13). Wówczas zachodzą następujące warunki:*

(i) $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ jest rozwiązaniem równania (13).

(ii) $\tilde{x}(n) = ax_1(n)$ jest rozwiązaniem równania (13) dla dowolnej stałej a.

Dowód powyższego lematu polega na bezpośrednim sprawdzeniu, że $x(n)$ i $\tilde{x}(n)$ są rozwiązaniami równania (13).

Z lematu powyższego wynika natychmiast następujący

Wniosek 2.16. *Jeżeli $x_1(n), \ldots, x_k(n)$ są rozwiązaniami równania (13), to*

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \cdots + a_k x_k(n),$$

gdzie a_i są stałymi, jest także rozwiązaniem tego równania.

Teraz niech $\{x_1(n), \ldots, x_k(n)\}$ będzie fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania (13) i niech $x(n)$ będzie dowolnym rowiązaniem tego równania. Wówczas istnieją stałe $a_1, \ldots, a_k$ takie, że $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$. Aby to wykazać, posłużymy się notacją (23). Zapiszmy równanie z niewiadomą ξ

$$X(n_0)\,\xi = \hat{x}(n_0), \tag{24}$$

gdzie

$$\hat{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{bmatrix}$$

i

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $X(n_0)$ jest nieosobliwa (bo rozwiązania $x_1(n), \ldots, x_k(n)$ stanowią układ fundamentalny), więc istnieje dokładnie jedno rozwiązanie powyższego równania macierzowego (układu równań liniowych):

$$\begin{cases} \xi_1 & = a_1 \\ \xi_2 & = a_2 \\ \vdots & \\ \xi_k & = a_k \end{cases}.$$

Rozważmy ciąg $\bar{x}(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$. Na mocy Wniosku 2.16 ciąg ten jest rozwiązaniem równania (13). Przy tym na mocy (24) zachodzą równości

$$\bar{x}(n) = x(n) \ \text{ dla } n = n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1,$$

co oznacza, że ciągi $\bar{x}$ i x są rozwiązaniami tego samego zagadnienie początkowego. W konsekwencji na mocy jednoznaczności w Twierdzeniu 2.3 muszą się pokrywać. Stąd

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n).$$

Z powyższych rozważań wynika zasadność następującej definicji

Definicja 2.17. *Niech* $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ *będzie fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania (13). Wówczas rozwiązanie*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

gdzie a_i *są dowolnymi stałymi, nazywamy rozwiązaniem ogólnym równania (13).*

3 Liniowe jednorodne równania o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie różnicowe rzędu k postaci

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{25}$$

gdzie p_i są stałymi rzeczywistymi i $p_k \neq 0$. (W tych równaniach przyjmujemy zawsze $n_0 = 0$.)

Uwaga 3.1. Zauważmy, że równanie (25) daje się zapisać przy pomocy operatora przesunięcia w postaci

$$p(E)\,x(n) = 0.$$

gdzie $p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k$.

Naszym celem jest teraz wyznaczenie fundamentalnego zbioru rozwiązań tego równania. Procedura jest dość prosta. Załóżmy, że rozwiązania równania (25) są postaci λ^n, gdzie λ jest ustaloną liczbą zespoloną. Wstawiając ten ciąg do równania, dostajemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi równość

$$\lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k\lambda^n = 0. \tag{26}$$

Zauważmy, że λ nie może być zerem, bo gdyby było, to z powyższego równania dla $n = 0$ otrzymalibyśmy $p_k = 0$, co przeczy uczynionemu założeniu. Dzieląc ostatnie równanie przez λ^n, otrzymujemy

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \tag{27}$$

Stąd mamy, że jeśli ciąg postaci λ^n jest rozwiązaniem równania (25), to liczba λ jest pierwiastkiem równania wielomianowego (27). Równanie (27) nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania (25), zaś pierwiastki równania charakterystycznego nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi*. Zauważmy, że żaden pierwiastek charakterystyczny nie jest zerem, gdyż $p_k \neq 0$. Odwrotnie, załóżmy teraz, że λ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (27). Wtedy podstawiając to λ do równania (27) i mnożąc stronami przez λ^n, dostajemy równanie (26), a to oznacza, że ciąg λ^n jest rozwiązaniem równania (25).

Mamy do rozważenia dwa przypadki:

Przypadek (a). Załóżmy, że pierwiastki charakterystyczne $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są różne, czyli każdy z pierwiastków charakterystycznych jest pierwiastkiem jednokrotnym. Pokażemy, że wtedy zbiór $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań. Obliczymy w tym celu kasoratian tego zbioru rozwiązań w zerze:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots \lambda_k^2 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \tag{28}$$

na mocy wzoru (4) i różności pierwiastków charakterystycznych. Zatem na mocy Twierdzenia 2.11 zbiór $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ jest zbiorem fundamentalnym rozwiązań. W konsekwencji rozwiązaniem ogólnym równania (25) jest

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \tag{29}$$

gdzie a_i są liczbami zespolonymi.

Przypadek (b). Załóżmy teraz, że różnymi pierwiastkami charakterystycznymi są $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ i mają one odpowiednio krotności $m_1, m_2, \ldots, m_r$, przy czym $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$. Przy tych założeniach równanie (25) może być zapisane w postaci

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) = 0. \tag{30}$$

Łatwo widać, że jeżeli ciągi $\psi_1(n), \psi_2(n), \ldots, \psi_{m_i}(n)$ są rozwiązaniami równania

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0, \tag{31}$$

to są rozwiązaniami równania (30). Przypuśćmy, że potrafimy znaleźć fundamentalny zbiór rozwiązań dla równania (31) przy $1 \leqslant i \leqslant r$. Można podejrzewać, że suma tych fundamentalnych zbiorów rozwiązań będzie fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania (30). Wyznaczymy fundamentalny zbiór rozwiązań dla równania (31).

Lemat 3.2. *Zbiór*

$$G_i = \left\{ \lambda_i^n, \binom{n}{1} \lambda_i^n, \binom{n}{2} \lambda_i^n, \ldots, \binom{n}{m_i - 1} \lambda_i^n \right\}$$

jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania (31).

Dowód. Obliczymy kasoratian w zerze dla zbioru G_i:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & \binom{2}{1}\lambda_i^2 & \lambda_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i^{m_i-1} & \binom{m_i-1}{1}\lambda_i^{m_i-1} & \binom{m_i-1}{2}\lambda_i^{m_i-1} & \dots & \lambda_i^{m_i-1} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_i^{\frac{m_i(m_i-1)}{2}} \neq 0,$$

bo pierwiastki charakterystyczne nie mogą być zerami. Wystarczy teraz pokazać, że ciąg $\binom{n}{s}\lambda_i^n$ dla $s = 0, 1, \dots, m_i - 1$ jest rozwiązaniem równania (31). Istotnie, korzystając ze wzorów (3) i (2) mamy

$$\begin{aligned} (E - \lambda_i)^{m_i} \left(\binom{n}{s}\lambda_i^n\right) &= \lambda_i^n (\lambda_i E - \lambda_i)^{m_i} \binom{n}{s} \\ &= \lambda_i^{n+m_i} (E - I)^{m_i} \binom{n}{s} \\ &= \lambda_i^{n+m_i} \Delta^{m_i} \binom{n}{s} = 0. \end{aligned}$$

To kończy dowód lematu. □

Teraz możemy ostatecznie wyznaczyć zbiór fundamentalny rozwiązań równania (30).

Twierdzenie 3.3. *Zbiór $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania (30).*

Dowód. Na mocy Lematu 3.2 ciągi ze zbioru G są rozwiązaniami równania (30). Wystarczy więc sprawdzić liniową niezależność. Kasoratian w zerze jest wyznacznikiem macierzy V z Twierdzenia 1.6 pomnożonym przez iloczyn czynników postaci $\lambda_i^{\frac{m_i(m_i-1)}{2}}$ (porównaj dowód Lematu 3.2), więc na mocy tego twierdzenia mamy

$$W(0) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{\frac{m_i(m_i-1)}{2}} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i)^{m_j m_i} \neq 0,$$

bo $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$ i $\lambda_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, r$. W konsekwencji G jest fundamentalnym zbiorem rozwiązań na mocy Twierdzenia 2.11. □

Z ostatniego twierdzenia wynika natychmiast

Wniosek 3.4. *Ogólnym rozwiązaniem równania (30) jest*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \dots + a_{im_i-1}n^{m_i-1}\right). \tag{32}$$

Przykład 3.5. Rozwiążemy zagadnienie początkowe

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0,$$

$$x(0) = 0 \ , \ x(1) = 1 \ , \ x(2) = 1 \ .$$

Równaniem charakterystycznym jest

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Pierwiastkami charakterystycznymi są $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$ i $\lambda_3 = 3$. Na mocy Wniosku 3.4 rozwiązaniem ogólnym jest

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_0 3^n.$$

Aby wyznaczyć stałe a_0, a_1, b_0 skorzystamy z warunków początkowych:

$$\begin{aligned} x(0) &= a_0 + b_0 = 0 \\ x(1) &= 2a_0 + 2a_1 + 3b_0 = 1 \\ x(2) &= 4a_0 + 8a_1 + 9b_0 = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań dostajemy

$$a_0 = 3 \ , \ a_1 = 2 \ , \ b_0 = -3 \ .$$

Ostatecznie rozwiązaniem naszego równania jest $x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n \cdot 2^n - 3^{n+1}$.

Pokażemy teraz, jak wygląda sytuacja, gdy pojawiają się pierwiastki charakterystyczne zespolone. Załóżmy, że równanie $x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0$ ma zespolone pierwiastki charakterystyczne postaci $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Pierwiastki te są wzajemnie sprzężone, gdyż równanie charakterystyczne jest równaniem kwadratowym o rzeczywistych współczynnikach. Zapiszmy te liczby w postaci trygonometrycznej

$$\lambda_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \ , \ \lambda_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Zgodnie z wzorem (29) rozwiązaniem ogólnym jest:

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1 (r\cos\theta + ir\sin\theta)^n + c_2 (r\cos\theta - ir\sin\theta)^n \\ &= r^n \left[(c_1 + c_2)\cos(n\theta) + i(c_1 - c_2)\sin(n\theta)\right] \\ &= r^n \left[a_1 \cos(n\theta) + a_2 \sin(n\theta)\right], \end{aligned} \tag{33}$$

gdzie $a_1 = c_1 + c_2$ i $a_2 = (c_1 - c_2)\, i$.

Przykład 3.6. Znajdziemy rozwiązanie ogólne równania

$$x(n+4) - 6x(n+3) + 13x(n+2) - 24x(n+1) + 36x(n) = 0.$$

Równaniem charakterystycznym jest

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 24\lambda + 36 = 0$$

Rozkładając lewą stronę na czynniki, dostajemy

$$(\lambda - 3)^2 \left(\lambda^2 + 4\right) = 0.$$

Zatem pierwiastkami charakterystycznymi są $\lambda_1 = 3 = \lambda_2$ oraz $\lambda_3 = 2i$ i $\lambda_4 = -2i$. W postaci trygonometrycznej λ_3 i λ_4 zapisują się następująco

$$\lambda_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \ , \ \lambda_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Na mocy powyższych rozważań rozwiązanie ogólne danego równania jest postaci

$$x(n) = a_0 3^n + a_1 n 3^n + a_3 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + a_4 2^n \sin\frac{n\pi}{2}.$$

4 Liniowe niejednorodne równania: metoda przewidywania

Zajmiemy się teraz równaniami postaci

$$y(n+k) + p_1(n)\, y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\, y(n) = g(n), \tag{34}$$

gdzie $p_k(n) \neq 0$ dla $n \geqslant n_0$ i $g(n)$ nie jest ciągiem zerowym. Ciąg $g(n)$ nazywamy *składnikiem wymuszającym*.

Zanim przejdziemy do ogólnej teorii przyjrzyjmy się przykładowi.

Przykład 4.1. Rozważmy równanie

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n.$$

Wykonamy trzy polecenia:

(a) Pokażemy, że $y_1(n) = n \cdot 3^{n-1}$ i $y_2(n) = (1+n) \cdot 3^{n-1}$ są rozwiązaniami tego równania. Istotnie, podstawiamy ciąg $y_1(n)$ do naszego równania:

$$\begin{aligned} L &= (n+2) \cdot 3^{n+1} - (n+1) \cdot 3^n - 6n \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1}(9n + 18 - 3n - 3 - 6n) = 15 \cdot 3^{n-1} = 5 \cdot 3^n = P. \end{aligned}$$

Podstawiamy teraz ciąg $y_2(n)$:

$$\begin{aligned} L &= (n+3) \cdot 3^{n+1} - (n+2) \cdot 3^n - 6(n+1) \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1}(9n + 27 - 3n - 6 - 6n - 6) = 15 \cdot 3^{n-1} = 5 \cdot 3^n = P. \end{aligned}$$

(b) Pokażemy, że $y(n) = y_2(n) - y_1(n)$ nie jest rozwiązaniem powyższego równania. Zauważmy, że $y(n) = y_2(n) - y_1(n) = 3^{n-1}$. Podstawiając do równania dostajemy

$$L = 3^{n+1} - 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} = 3^n(3 - 1 - 2) = 0 \neq 5 \cdot 3^n = P.$$

(c) Pokażemy, że $\varphi(n) = cn \cdot 3^{n-1}$ nie jest rozwiązaniem danego równania dla dowolnej stałej c różnej od 1. Podstawmy do równania ciąg $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned} L = c(n+2) \cdot 3^{n+1} - c(n+1) \cdot 3^n - 6cn \cdot 3^{n-1} & \\ = c \cdot 3^{n-1}(9n + 18 - 3n - 3 - 6n) = 5c \cdot 3^n. \end{aligned}$$

To ostatnie wyrażenie pokrywa się z prawą strona danego równania tylko dla $c = 1$.

Zauważmy, że w punkcie (b) powyższego przykładu różnica rozwiązań równania niejednorodnego okazała się być rozwiązaniem stowarzyszonego z nim równania jednorodnego. Istotnie, zachodzi

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli $y_1(n)$ i $y_2(n)$ są rozwiązaniami równania (34), to ciąg $x(n) = y_2(n) - y_1(n)$ jest rozwiązaniem stowarzyszonego z nim równania jednorodnego*

$$x(n+k) + p_1(n)\,x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\,x(n) = 0. \tag{35}$$

Dowód. Podstawiając ciąg $x(n)$ do równania (35), dostajemy

$$\begin{aligned} L = y_2(n+k) - y_1(n+k) + p_1(n)\,(y_2(n+k-1) - y_1(n+k-1)) & \\ + \cdots + p_k(n)\,(y_2(n) - y_1(n)) & \\ = y_2(n+k) + p_1(n)\,y_2(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\,y_2(n) & \\ - [y_1(n+k) + p_1(n)\,y_1(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\,y_1(n)] & \\ = g(n) - g(n) = 0 = P. \end{aligned}$$

□

Umówmy się, że ogólne rozwiązanie równania jednorodnego stowarzyszonego z danym równaniem niejednorodnym nazywać będziemy *rozwiązaniem komplementarnym* równania niejednorodnego i oznaczać będziemy symbolem $y_c(n)$. Rozwiązanie równania niejednorodnego nazywać będziemy *rozwiązaniem szczególnym* i oznaczać symbolem $y_p(n)$. Następne twierdzenie daje nam algorytm na generowanie wszystkich rozwiązań równania niejednorodnego (34).

Twierdzenie 4.3. *Każde rozwiązanie $y(n)$ równania (34) może być zapisane w postaci*

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

gdzie $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ jest zbiorem fundamentalnym rozwiązań jednorodnego równania stowarzyszonego (35).

Dowód. Łatwo widać, że na mocy Twierdzenia 4.2 różnica $y(n) - y_p(n)$ jest rozwiązaniem jednorodnego równania stowarzyszonego, czyli na mocy Definicji 2.17 zachodzi równość $y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$ dla pewnych stałych a_i, gdzie $i = 1, \ldots, k$. □

Powyższe stwierdzenie upoważnia nas do zdefiniowania *ogólnego rozwiązania równania niejednorodnego* jako

$$y(n) = y_c(n) + y_p(n). \tag{36}$$

Przejdźmy teraz do wyznaczania szczególnych rozwiązań równań niejednorodnych ze stałymi współczynnikami takich, jak

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = g(n). \tag{37}$$

Ze względu na prostotę zaprezentujemy tzw. *metodę przewidywania* zwaną inaczej *metodą współczynników nieoznaczonych.* Metoda ta ogólnie mówiąc polega na przewidzeniu postaci rozwiązania szczególnego, a następnie podstawieniu jej do równania, co umożliwia sprecyzowanie ostateczne tego rozwiązania. Pamiętajmy jednak, że metoda ta nie jest efektywna dla zupełnie dowolnego ciągu $g(n)$. Jednakże dobrze działa, gdy $g(n)$ jest liniową kombinacją składników postaci

$$a^n\ ,\ \sin(bn)\ ,\ \cos(bn)\ \text{albo}\ n^l \tag{38}$$

lub kombinacja liniową iloczynów powyższych wyrażeń takich, jak

$$a^n \sin(bn), \ldots, a^n n^l, \ldots, a^n n^l \cos(bn), \ldots\ . \tag{39}$$

Definicja 4.4. *Operator wielomianowy $N(E)$, gdzie E jest operatorem przesunięcia nazywamy anihilatorem $g(n)$, gdy*

$$N(E)\, g(n) = 0. \tag{40}$$

Inaczej mówiąc $N(E)$ jest anihilatorem $g(n)$, gdy $g(n)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego (40). Zatem wyznaczenie anihilatora polega na znalezieniu możliwie najprostszego równania jednorodnego, którego rozwiązaniem jest $g(n)$.

Przykład 4.5. Podamy anihilatory pewnych składników wymuszających:

$$\begin{aligned}
&g(n) = 3^n && N(E) = E - 3\\
&g(n) = \cos\frac{n\pi}{2} && N(E) = E^2 + 1\\
&g(n) = n^2 + n && N(E) = (E-1)^3\\
&g(n) = n\cdot(-2)^n + 3\cdot 2^n \sin\frac{n\pi}{2} && N(E) = (E+2)^2\left(E^2+4\right)
\end{aligned}$$

Zapiszmy równanie (37) używając operatora E

$$p(E)\, y(n) = g(n), \tag{41}$$

gdzie $p(E) = E^k + p_1 E^{k-1} + p_2 E^{k-2} + \cdots + p_k I$.

Załóżmy teraz, że $N(E)$ jest anihilatorem ciągu $g(n)$ w (41). Zastosujmy operator $N(E)$ do obu stron równania (41)

$$N(E)\, p(E)\, y(n) = 0. \tag{42}$$

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ będą pierwiastkami charakterystycznymi równania jednorodnego

$$p(E)\, y(n) = 0 \tag{43}$$

i niech $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ będą pierwiastkami charakterystycznymi równania jednorodnego

$$N(E)\, y(n) = 0. \tag{44}$$

Musimy rozważyć dwa przypadki:

Przypadek 1. Żadne z λ_i nie pokrywa się z żadnym μ_j. Wówczas $y_p(n)$ piszemy jako ogólne rozwiązanie równania (44) z nieoznaczonymi współczynnikami. Podstawiając je do równania (37) wyznaczamy te współczynniki.

Przypadek 2. Któreś λ_{i_0} pokrywa się z pewnym μ_{j_0}. W tym przypadku zbiór charakterystycznych pierwiastków równania (42) jest sumą zbiorów $\{\lambda_i\}$ i $\{\mu_j\}$ i w konsekwencji zawiera pierwiastki o wyższej krotności niż każdy ze składników oddzielnie. Dla wyznaczenia rozwiązania szczególnego $y_p(n)$ znajdujemy najpierw rozwiązanie ogólne równania (42), a następnie opuszczamy w nim wszystkie składniki, które pojawiają się w ogólnym rozwiązaniu $y_c(n)$ równania (43). Dalej, dla wyznaczenia współczynników, postępujemy, jak w Przypadku 1.

Przykład 4.6. Rozwiążemy równanie

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n \cdot 2^n. \tag{45}$$

Pierwiastkami charakterystycznymi jednorodnego równania stowarzyszonego są $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -4$. Zatem

$$y_c(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-4)^n.$$

Ponieważ anihilatorem składnika wymyszającego jest $N(E) = (E-2)^2$, więc $\mu_1 = \mu_2 = 2$ i zbiory pierwiastków charakterystycznych są rozłączne. Zatem

$$y_p(n) = a_1 \cdot 2^n + a_2 n \cdot 2^n.$$

Wstawiając ciąg $y_p(n)$ do równania (45), dostajemy

$$a_1 \cdot 2^{n+2} + a_2(n+2) \cdot 2^{n+2} + a_1 \cdot 2^{n+1} + a_2(n+1) \cdot 2^{n+1} - 12a_1 \cdot 2^n - 12a_2 n \cdot 2^n = n \cdot 2^n,$$

czyli

$$(10a_2 - 6a_1) \cdot 2^n - 6a_2 n \cdot 2^n = n \cdot 2^n.$$

Aby powyższa równość zachodziła, musi być spełniony układ równań:

$$\begin{cases} -6a_1 + 10a_2 &= 0 \\ -6a_2 &= 1 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest

$$a_1 = -\frac{5}{18} \qquad \text{i} \qquad a_2 = -\frac{1}{6}.$$

W konsekwencji

$$y_p(n) = -\frac{5}{18} \cdot 2^n - \frac{1}{6} n \cdot 2^n$$

i rozwiązaniem ogólnym danego równania jest

$$y(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 (-4)^n - \frac{5}{18} \cdot 2^n - \frac{1}{6} n \cdot 2^n.$$

Przykład 4.7. Rozwiążemy równanie

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n. \tag{46}$$

Pierwiastkami charakterystycznymi jednorodnego równania stowarzyszonego są $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -2$. Zatem

$$y_c(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-2)^n.$$

Ponieważ anihilatorem składnika wymuszającego jest $N(E) = E - 3$, więc $\mu_1 = 3$, czyli $\mu_1 = \lambda_1$. Zauważmy, że dane równanie zapisane przy użyciu operatora przesunięcia jest postaci

$$(E-3)(E+2)\, y(n) = 5 \cdot 3^n.$$

Zatem przykładając do obu stron tego równania anihilator składnika wymuszającego, otrzymujemy równanie jednorodne

$$(E-3)^2 (E+2)\, y(n) = 0. \tag{47}$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (47) jest

$$\tilde{y}(n) = (a_1 + a_2 n) \cdot 3^n + a_3 (-2)^n.$$

Opuszczając w tym rozwiązaniu składniki występujące w $y_c(n)$, otrzymujemy $y_p(n) = a_2 n \cdot 3^n$. Podstawienie $y_p(n)$ do równania (46) daje nam

$$a_2 (n+2) \cdot 3^{n+2} - a_2 (n+1) \cdot 3^{n+1} - 6 a_2 n \cdot 3^n = 5 \cdot 3^n,$$

skąd

$$a_2 = \frac{1}{3}.$$

W kosekwencji $y_p(n) = n \cdot 3^{n-1}$ i rozwiązaniem ogólnym równania (46) jest

$$y(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 (-2)^n + n \cdot 3^{n-1}.$$

Przykład 4.8. Rozwiążemy równanie różnicowe

$$y(n+2) + 4y(n) = 8 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2}. \tag{48}$$

Równaniem charakterystycznym stowarzyszonego równania jednorodnego jest

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Pierwiastkami charakterystycznymi są więc

$$\lambda_1 = 2i \quad , \quad \lambda_2 = -2i.$$

Stąd

$$y_c(n) = 2^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

(patrz wzór (33) Anihilatorem składnika wymuszającego jest $N(E) = E^2 + 4$. Zatem $\mu_1 = 2i$ i $\mu_2 = -2i$, czyli pierwiastki charakterystyczne powtarzają się. Używając operatora przesunięcia do zapisu danego równania niejednorodnego, otrzymujemy

$$\left(E^2 + 4\right) y(n) = 8 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Przykładając do obu stron tego równania anihilator składnika wymuszającego, dostajemy równanie jednorodne

$$\left(E^2 + 4\right)^2 y(n) = 0,$$

którego rozwiązaniem ogólnym jest

$$\tilde{y}(n) = 2^n \left((a_1 + a_2 n) \cos \frac{n\pi}{2} + (a_3 + a_4 n) \sin \frac{n\pi}{2} \right).$$

Opuszczamy w tym rozwiązaniu składniki występujące w $y_c(n)$ i otrzymujemy

$$y_p(n) = 2^n \left(a_2 n \cos \frac{n\pi}{2} + a_4 n \sin \frac{n\pi}{2} \right).$$

Podstawiając $y_p(n)$ do równania (48), mamy

$$2^{n+2} \left[a_2 (n+2) \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) + a_4 (n+2) \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) \right] + 4 \cdot 2^n \left[a_2 n \cos \frac{n\pi}{2} + a_4 n \sin \frac{n\pi}{2} \right] = 8 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Ponieważ $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\frac{n\pi}{2}$ i $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\frac{n\pi}{2}$, więc porównując współczynniki w powyższym równaniu, dostajemy $a_2 = -1$ i $a_4 = 0$. W konsekwencji mamy

$$y_p(n) = -2^n n \cos \frac{n\pi}{2}$$

i ogólnym rozwiązaniem równania (48) jest

$$y(n) = 2^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} - n \cos \frac{n\pi}{2} \right).$$

Przykład 4.9. Rozwiążemy równanie różnicowe

$$y(n+2) + 2y(n+1) + 2y(n) = (-1)^n \tag{49}$$

z warunkami początkowymi $y(0) = 2$ i $y(1) = 0$. Równaniem charakterystycznym stowarzyszonego równania niejednorodnego jest

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

więc pierwiastkami charakterystycznymi są $\lambda_1 = -1+i$ i $\lambda_2 = -1-i$. Modułem pierwszego z tych pierwiastków jest $\sqrt{2}$, zaś jego argumentem jest $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Stąd

$$y_c(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(c_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + c_2 \sin \frac{3n\pi}{4}\right).$$

Anihilatorem składnika wymuszającego jest $N(E) = E + 1$. Zatem $\mu_1 = -1$. Zbiory pierwiastków charakterystycznych są rozłączne, więc $y_p(n) = a(-1)^n$. Podstawiając $y_p(n)$ do równania (49), otrzymujemy rwónanie

$$a(-1)^{n+2} + 2a(-1)^{n+1} + 2a(-1)^n = (-1)^n,$$

z którego dostajemy $a = 1$. Stąd $y_p(n) = (-1)^n$ i rozwiązaniem ogólnym równania (49) jest

$$y(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(c_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + c_2 \sin \frac{3n\pi}{4}\right) + (-1)^n.$$

Wykorzystując teraz warunki początkowe, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} c_1 \left(\sqrt{2}\right)^0 \cos 0 + c_2 \left(\sqrt{2}\right)^0 \sin 0 + 1 & = & 2 \\ c_1 \left(\sqrt{2}\right)^1 \cos \frac{3\pi}{4} + c_2 \left(\sqrt{2}\right)^1 \sin \frac{3\pi}{4} - 1 & = & 0 \end{cases}.$$

Stąd

$$\begin{cases} c_1 & = & 1 \\ -c_1 + c_2 & = & 1 \end{cases},$$

czyli mamy $c_1 = 1$ i $c_2 = 2$. Ostatecznie rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest

$$y(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos \frac{3n\pi}{4} + 2 \sin \frac{3n\pi}{4}\right) + (-1)^n.$$

5 Zadania

Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe:

Zadanie 1:

$$y(n+1) - y(n) = 3 \cdot (-1)^n,$$
$$y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Zadanie 2:

$$y(n+1) - y(n) = 2n + 1,$$
$$y(0) = 2.$$

Zadanie 3:

$$y(n+1) - 3y(n) = 5,$$
$$y(0) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 4:

$$y(n+1) - 2y(n) = 4 \cdot 3^n,$$
$$y(0) = 7.$$

Zadanie 5:

$$y(n+1) + 2y(n) = n \cdot (-2)^n + 5,$$
$$y(0) = \frac{2}{3}.$$

Zadanie 6:

$$y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = 2n + 8 \cdot 3^n,$$
$$y(0) = \frac{11}{2} \ , \ y(1) = \frac{19}{2}.$$

Zadanie 7:

$$y(n+2) + y(n+1) - 2y(n) = 2n + (-2)^n \ ,$$
$$y(0) = 1 \ , \ y(1) = -\frac{23}{9}.$$

Zadanie 8:

$$y(n+3) - 7y(n+2) + 8y(n+1) + 16y(n) = 10 \cdot 4^{n+2} - 36,$$
$$y(0) = 0 \ , \ y(1) = 4 \ , \ y(2) = 96.$$

Zadanie 9:

$$y(n+3) - 2y(n+2) + 9y(n+1) - 18y(n) = 5 + 3^{n+2},$$
$$y(0) = 1 \ , \ y(1) = 0 \ , \ y(2) = 8.$$

Zadanie 10:

$$y(n+3) - 2y(n+2) + 4y(n+1) - 8y(n) = 32 \cdot 2^n \sin \frac{n\pi}{2} + 5 \cdot (-1)^n \ ,$$
$$y(0) = \frac{5}{3} \ , \ y(1) = \frac{25}{3} \ , \ y(2) = -\frac{1}{3}.$$

Zadanie 11:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 4y(n) = 5 \cdot 3^n \cos \frac{n\pi}{2} - 6 \cdot 3^n \sin \frac{n\pi}{2} + 3n,$$
$$y(0) = 0 \ , \ y(1) = 2 - \sqrt{3}.$$

Zadanie 12:

$$y(n+4) + 2y(n+2) + y(n) = 4n + 25n \cdot 2^n,$$
$$y(0) = -\frac{21}{5} \ , \ y(1) = -\frac{22}{5} \ , \ y(2) = -\frac{29}{5} \ , \ y(3) = -\frac{18}{5}.$$

Zadanie 13:

$$y(n+4) - y(n) = 4 + 8\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$y(0) = 2\ ,\ y(1) = 0\ ,\ y(2) = 0\ ,\ y(3) = 4.$$

Odpowiedzi:

1. $y(n) = \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + 1.$
2. $y(n) = n^2 + 2.$
3. $y(n) = 3^{n+1} - \frac{5}{2}.$
4. $y(n) = 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n.$
5. $y(n) = \left(-n^2 + n - 4\right) \cdot (-2)^{n-2} + \frac{5}{3}.$
6. $y(n) = (-1)^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n - n - \frac{1}{2}.$
7. $y(n) = (-2)^n \left(\frac{1}{6}n + 1\right) + \frac{1}{3}n^2 - \frac{5}{9}n.$
8. $y(n) = \left(n^2 + n\right) \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n - 2.$
9. $y(n) = 2^n - 3^n \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}.$
10. $y(n) = 2^{n+1} + 2^n \sin\frac{n\pi}{2} + n \cdot 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}(-1)^n.$
11. $y(n) = 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\right) - 3^n \cos\frac{n\pi}{2} + n.$
12. $y(n) = \cos\frac{n\pi}{2} + n\sin\frac{n\pi}{2} + \left(n - \frac{16}{5}\right) \cdot 2^n + n - 2.$
13. $y(n) = 2n\cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^n + n + 1.$